

Concours Centrale - Supélec 2001

Épreuve : Mathématiques I

Filière PSI

### *Définitions et notations*

On note  $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$  l'espace vectoriel réel des fonctions définies et continues dans l'intervalle  $[0, 1]$  à valeurs réelles.

Pour  $f$  et  $g$  éléments de  $E$ , on pose  $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ , ce qui définit sur  $E$  un produit scalaire dont la norme associée est notée  $\| \cdot \|$  (on rappelle que  $\|f\| = \sqrt{(f|f)}$ ) et munit  $E$  d'une structure d'espace préhilbertien réel.

On dit qu'une suite  $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  est orthonormale si elle vérifie la condition

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, (\Phi_m | \Phi_n) = \delta_{m, n} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$$

Soit  $\Phi$  une suite orthonormale de  $E$ .

1) Si  $n \in \mathbb{N}$ , on désigne par  $V_\Phi^n$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $\{\Phi_j | 0 \leq j \leq n\}$ , par  $\prod_\Phi^n$  l'opérateur de projection orthogonale de  $E$  sur  $V_\Phi^n$  et enfin par  $d_\Phi^n(f)$  la distance de  $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$  à  $V_\Phi^n$ .

2) On désigne par  $V_\Phi$  le sous-espace vectoriel de  $E$  réunion des  $V_\Phi^n$

$$V_\Phi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_\Phi^n ;$$

par définition  $V_\Phi$  est égal à l'ensemble des éléments de  $E$  qui sont combinaisons linéaires finies d'éléments de la famille, c'est-à-dire qui s'écrivent sous la forme

$\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i \Phi_{j_i}$ , où  $j_1, j_2, \dots, j_p$  sont des entiers distincts et  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  des coefficients réels.

3) On dit que la suite orthonormale  $\Phi$  est totale dans  $E$  si pour tout élément  $f$  de  $E$  il existe une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $V_\Phi$  convergeant vers  $f$ .

Enfin pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, 1]$ , on pose

$$C_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \sqrt{2} \cos(n\pi x) & \text{si } n > 0 \end{cases} ; \quad S_n(x) = \sqrt{2} \sin((n+1)\pi x)$$

et on note  $C = (C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $S = (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

La partie IV est largement indépendante des trois parties précédentes.

### **Partie I - Généralités sur les suites orthonormales**

**I.A** - Montrer que  $C$  et  $S$  sont des suites orthonormales de  $E$ .

**I.B** - Soit  $\Phi$  une suite orthonormale de  $E$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $f \in E$ .

I.B.1) Établir la formule  $\|f\|^2 = \left\| \prod_{\Phi}^n(f) \right\|^2 + [d_{\Phi}^n(f)]^2$ .

I.B.2) Calculer

$$\sup_{\|f\|=1} \left\| \prod_{\Phi}^n(f) \right\|$$

I.B.3) Expliciter  $\prod_{\Phi}^n(f)$  dans la base  $\{\Phi_j | 0 \leq j \leq n\}$ .

En déduire que la série de terme général  $(f|\Phi_k)^2$  est convergente et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (f|\Phi_k)^2 \leq \|f\|^2$$

**I.C** - On suppose toujours que  $\Phi$  est une suite orthonormale de  $E$ .

I.C.1) Soit  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $V_{\Phi}$ , convergeant dans  $E$  et soit  $f = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k)$ .

a) Montrer que pour  $k \in \mathbb{N}$  donné, on peut trouver  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad n \geq N \Rightarrow \left\{ f - \prod_{\Phi}^n(f) = f - f_k + \prod_{\Phi}^n(f_k - f) \right\}$$

b) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \prod_{\Phi}^n(f) - f \right\| = 0$ .

I.C.2) Démontrer alors l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

i)  $\Phi$  est totale dans  $E$ .

ii)  $\forall f \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \prod_{\Phi}^n(f) - f \right\| = 0$ .

I.C.3) **On suppose de plus dans cette question seulement** que  $\Phi$  est totale dans  $E$ .

Pour  $f \in E$  et  $n \in \mathbb{N}$  expliciter  $\|f\|^2$  et  $[d_{\Phi}^n(f)]^2$  à l'aide des  $(f|_{\Phi_k})$ .

### I.D - Étude de la suite $C$ .

I.D.1) Soit  $f \in E$ . Montrer qu'il existe une unique fonction continue paire périodique et de période 2 notée  $\tilde{f}$  telle que sa restriction à  $[0,1]$  soit égale à  $f$ .

I.D.2) Montrer alors que la suite  $C$  définie dans le préambule est totale dans  $E$ . On pourra introduire les coefficient de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique  $h$  définie par  $h(x) = \tilde{f}\left(\frac{x}{\pi}\right)$ , la fonction  $\tilde{f}$  étant celle de la question précédente.

I.D.3) Exhiber une suite orthonormale de  $E$  non totale dans  $E$ .

## Partie II - Fonctions lipschitziennes

On note  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point. Une fonction  $f$  définie dans  $I$  et à valeurs réelles est dite lipschitzienne dans  $I$  si elle vérifie la condition :

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*, (\forall (x,y) \in I^2), |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$

On notera  $\text{Lip}(I, \mathbb{R})$  l'ensemble de toutes les fonctions réelles définies et lipschitziennes dans  $I$ .

### II.A - Propriétés élémentaires.

II.A.1) Vérifier que  $\text{Lip}(I, \mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $C^0(I, \mathbb{R})$ .

Le produit de deux éléments de  $\text{Lip}(I, \mathbb{R})$  est-il encore un élément de  $\text{Lip}(I, \mathbb{R})$  ? si  $f \in \text{Lip}(I, \mathbb{R})$  justifier l'existence du réel  $k(f)$  défini par

$$k(f) = \sup \left\{ \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \mid (x,y) \in I^2, x \neq y \right\}$$

Ce réel sera appelé la constante de Lipschitz de  $f$ .

II.A.2) Si  $I$  est un intervalle compact de  $\mathbb{R}$ , vérifier que  $\text{Lip}(I, \mathbb{R})$  est une sous-algèbre de  $C^0(I, \mathbb{R})$ . Exhiber une fonction définie et continue sur  $[0, 1]$  mais non lipschitzienne sur ce même intervalle.

**II.B** - Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $I$ .

Montrer que  $f'$  est lipschitzienne sur  $I$  si et seulement si  $f'$  est bornée sur  $I$ .

Exprimer dans ce cas la constante de Lipschitz à l'aide de  $f'$ .

**II.C** - Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\text{Lip}(I, \mathbb{R})$  qui converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$ . On suppose de plus que l'ensemble des  $\{k(f_n) | n \in \mathbb{N}\}$  est borné.

Montrer que  $f \in \text{Lip}(I, \mathbb{R})$ .

**II.D** - Soit  $g \in \text{Lip}([0, 1], \mathbb{R})$  telle que  $k(g) \leq 1$ .

II.D.1) Montrer qu'il existe  $\widehat{g} \in \text{Lip}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que :

$$k(\widehat{g}) \leq 1 \text{ et } \forall x \in [0, 1] \quad \widehat{g}(x) = g(x)$$

II.D.2) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$  on pose  $g_n(x) = n \int_x^{x + \frac{1}{n}} \widehat{g}(t) dt$ .

Montrer que  $g_n$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  à dérivée bornée par 1.

Montrer que la suite  $g_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers  $\widehat{g}$ .

**II.E - Dans les deux dernières questions de cette partie les suites  $S$  et  $C$  sont celles définies dans le préambule.**

Soit  $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ .

II.E.1) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $(f|C_n)$  en fonction de  $(f|S_{n-1})$ .

II.E.2) Montrer que la série de terme général  $n^2(f|C_n)^2$  est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(f|C_n)^2 \leq \frac{1}{\pi^2} \|f'\|^2$$

**II.F** - Soit  $f \in \text{Lip}([0, 1], \mathbb{R})$ .

II.F.1) Montrer que la série de terme général  $n^2(f|C_n)^2$  est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(f|C_n)^2 \leq \frac{1}{\pi} k(f)^2$$

II.F.2) En déduire alors que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $d_c^{n-1}(f) \leq \frac{1}{n\pi} k(f)$ .

### **Partie III - Constantes de Lipschitz d'une suite orthonormale**

L'objectif est de montrer que la suite des constantes de Lipschitz des éléments d'une suite orthonormale de  $E$  est toujours minorée par une suite de la forme  $(\Gamma n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $\Gamma$  est une constante positive indépendante de la suite choisie dans  $E$ .

**III.A** - Soient  $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\Psi = (\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites orthonormales de  $E$ .  
Montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n + \sum_{j=0}^m d_{\Phi}^{n-1}(\Psi_j)^2 \geq m + 1$$

et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=0}^{2n-1} d_{\Phi}^{n-1}(\Psi_j)^2 \geq n$$

**III.B** - On donne maintenant une suite  $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  orthonormale de  $E$ .

On suppose de plus que toutes les fonctions  $\Phi_n$  sont lipschitziennes dans  $[0,1]$ .

III.B.1) Montrer que

$$\forall n \geq 1, \sum_{j=0}^{2n-1} k(\Psi_j)^2 \geq \pi^2 n^3$$

III.B.2) Montrer que la suite  $(k(\Psi_j))_{j \in \mathbb{N}}$  est non bornée.

III.B.3) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} k(\Psi_n) = +\infty$ .

III.B.4) Trouver la valeur de  $k(C_n)$ .

III.B.5) Montrer qu'il existe un réel  $\Gamma > 0$  vérifiant la propriété suivante : pour toute suite orthonormale  $\Psi = (\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions lipschitziennes sur  $[0,1]$  telle que la suite  $(k(\Psi_j))_{j \in \mathbb{N}}$  soit une suite croissante, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, k(\Psi_n) \geq \Gamma n$$

Ce résultat est dû à W. Rudin (1952).

### **Partie IV - Constantes de Lipschitz des polynômes de Legendre**

Le but de cette dernière partie est le calcul des constantes de Lipschitz d'une suite orthonormale d'éléments de  $E$  constituée de polynômes.

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$  on note :

$$U_n(x) = (x^2 - 1)^n, \quad P_n = U_n^{(n)}, \quad L_n = \frac{1}{2^n n!} P_n$$

La notation  $f^{(n)}$  représente la dérivée  $n$ -ième de la fonction  $f$ .

On démontre, et on admettra, que l'on a :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{2n+1} & \text{si } m = n \end{cases}$$

**IV.A** - Montrer qu'il existe une unique suite de réels tous strictement positifs notée  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que la suite  $Q = (Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, Q_n(x) = \alpha_n L_n(2x - 1)$$

est une suite orthonormale de  $E$ .

Donner la valeur de  $\alpha_n$  pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ .

Dans la suite, la notation  $Q_n$  désigne l'élément ainsi calculé.

#### **IV.B** -

IV.B.1) Soit  $f \in E$  donné. Montrer que la suite  $(d_Q^n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

IV.B.2) Montrer que la suite  $Q$  définie ci-dessus est totale dans  $E$ .

Pour cela on pourra montrer que la suite  $(d_Q^n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$  en appliquant le théorème de Weierstrass à la fonction  $f \in E$  donnée.

IV.B.3) Déterminer toutes les suites orthonormales  $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$  possédant la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Phi_n \text{ est une fonction polynomiale de degré } n$$

**IV.C** - Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = n! \sum_{k=0}^{k=n} (C_n^k)^2 (x-1)^k (x+1)^{n-k}$$

**IV.D** - Soient  $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ . On désigne par  $i$  le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\pi/2$ .

La lettre  $\theta$  désigne une variable réelle.

IV.D.1) Démontrer que si  $|x| \leq 1$  alors  $L_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta)^n d\theta$ .

On pourra remarquer que

$$x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta = \left( \sqrt{\frac{1+x}{2}} + i \sqrt{\frac{1-x}{2}} e^{i\theta} \right) \left( \sqrt{\frac{1+x}{2}} + i \sqrt{\frac{1-x}{2}} e^{-i\theta} \right)$$

IV.D.2) Établir que

$$\max_{x \in [-1, +1]} |L_n(x)| = 1$$

Quelles sont les valeurs de  $x \in [-1, +1]$  telles que  $|L_n(x)| = 1$  ?

**IV.E** -

IV.E.1) En remarquant que  $(x^2 - 1)U'_n(x) = 2nxU_n(x)$ , montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

IV.E.2) Prouver que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, L'_{n+1}(x) = xL'_n(x) + (n+1)L_n(x)$$

**IV.F** - Calculer enfin la valeur  $k(Q_n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

---

••• FIN •••

---