SESSION 2001 MP

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

PHYSIQUE 1

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont ***autorisées****, sous réserve des conditions définies dans la circulaire* ***n°99-186 du 16.11.99****.*

Conformément à l'usage international, les vecteurs sont représentés en gras et la dérivée par rapport au temps d'une grandeur par un point placé au-dessus de la lettre représentant cette grandeur.

On donne les constantes physiques suivantes, en unité SI :

Nombre d'Avogadro : $N_A \approx 6{,}02\times10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$

Constante universelle des gaz parfaits : $R \approx 8{,}314\,\mathrm{J.K^{-1}mol^{-1}}$

Vitesse de la lumière dans le vide : $c \approx 3\times10^{8}\,\mathrm{m.s^{-1}}$

Constante de Boltzmann : $k_B \approx 1{,}38\times10^{-23}\,\mathrm{J.K^{-1}}$

Constante de Planck : $h \approx 6{,}626\times10^{-34}\,\mathrm{J.s}$

A. Un exemple simple de servomécanisme à bifurcation mécanique

On se propose d'étudier un système mécanique déformable constituant un servomécanisme à bifurcation. Ce servomécanisme, de type régulateur à boules, fut inventé par l'ingénieur écossais J. Watt en 1788.

On considère le système déformable $\mathcal{S}_d$ représenté sur la figure A1. Il est constitué d'un losange plan articulé OA_1BA_2, de côté $l = 0{,}3\,\mathrm{m}$, qui peut tourner autour de sa diagonale verticale OB. L'extrémité supérieure O est fixée au bâti extérieur $\mathcal{B}$, auquel est associé le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}(Oxyz)$, supposé galiléen, alors que l'extrémité basse B peut coulisser librement sur l'axe vertical descendant Oz du référentiel.

L'autre diagonale du losange, horizontale, porte à ses extrémités deux masselottes identiques A_1 et A_2, de masse $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$. Toutes les autres masses du système sont négligeables devant m.

Tournez la page S.V.P.

On désigne par Ozx' le plan du référentiel tournant $\mathcal{R}'(Ox'y'z)$ associé au losange (plan de la figure A1), par $\mathbf{g}$ le champ de pesanteur terrestre, de valeur $g = 9{,}81\,\mathrm{m.s^{-2}}$, par θ l'angle $(Oz, \mathbf{OA}_1)$ que fait la tige OA_1 avec Oz et par φ l'angle (Ox, Ox'). Dans tout le problème, on supposera que θ varie entre 0 et $\pi/2$.

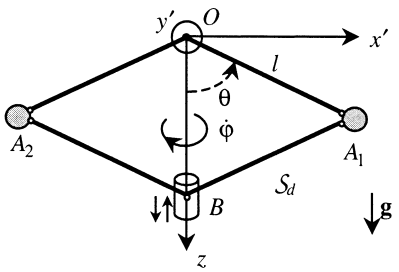

Figure A1a) : Vue de face

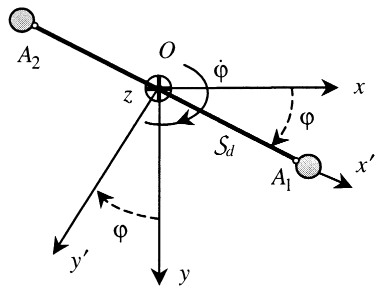

Figure A1b) : Vue de dessus

1. Liaisons

On distingue, d'une part les liaisons entre $\mathcal{S}_d$ et $\mathcal{B}$, d'autre part les liaisons entre les différentes parties de $\mathcal{S}_d$. Toutes les liaisons intérieures et extérieures sont supposées parfaites.

a) Que peut-on dire de la puissance totale des actions intérieures de contact entre les différentes parties de $\mathcal{S}_d$? Sa valeur dépend-elle du référentiel considéré ? Pourquoi ?

b) Quelle est la valeur de la projection selon Oz du moment Γ_O des actions de contact de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{S}_d$ en O ?

2. Solide tournant

En fixant l'extrémité B sur l'axe Oz et en supprimant les tiges OA_2 et A_2B du losange, on obtient le solide OA_1B (figure A2). On communique initialement à ce solide $\mathcal{S}$ une vitesse angulaire $\dot{\varphi}_0$ autour de l'axe de rotation Oz.

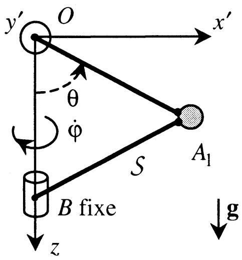

Figure A2

a) Exprimer, dans la base de $\mathcal{R}'$, en fonction de θ et de $\dot{\varphi}$, les vecteurs quantité de mouvement $\mathbf{P}$ et moment cinétique $\mathbf{L}_O$ en O, par rapport à $\mathcal{R}$.

b) On désigne par $\mathbf{R}$ et $\boldsymbol{\Gamma}_O$ la somme et le moment des actions de contact qu'exerce $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{S}$. A l'aide des théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique en O, appliqués à ce solide en rotation autour de Oz, trouver les expressions vectorielles des actions de contact $-\mathbf{R}$ et $-\boldsymbol{\Gamma}_O$ qu'exerce réciproquement le solide en rotation sur l'axe Oz, en fonction des dérivées dans $\mathcal{R}$, $\mathrm{d}\mathbf{P}/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}\mathbf{L}_O/\mathrm{d}t$ et de la pesanteur.

c) Montrer que, si l'on veut rendre $-\mathbf{R}$ indépendant du mouvement de rotation autour de l'axe vertical, et diriger $-\boldsymbol{\Gamma}_O$ selon l'axe de rotation, il est préférable d'utiliser un solide symétrique tel que le losange OA_1BA_2 plutôt que sa moitié OA_1B. Que deviennent les expressions vectorielles de $-\mathbf{R}$ et $-\boldsymbol{\Gamma}_O$ si le solide est le losange OA_1BA_2 ? Que peut-on dire de $\dot{\varphi}$, sachant que les liaisons sont parfaites ?

d) Quelle est, en fonction de θ et $\dot{\varphi}$, l'expression de l'énergie cinétique E_k du solide-losange OA_1BA_2 ? Retrouver le résultat précédent, concernant $\dot{\varphi}$, à l'aide de l'énergie.

3. Système déformable astreint à tourner uniformément

L'extrémité B peut coulisser sans frottement le long de l'axe de rotation. Un moteur impose, au plan Ozx' du losange déformable OA_1BA_2, un vecteur vitesse angulaire de rotation constant $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{e}_z$ par rapport à $\mathcal{R}$, en exerçant le moment $\mathbf{M}_m = \mathrm{M}_m\mathbf{e}_z$ en O (figure A3).

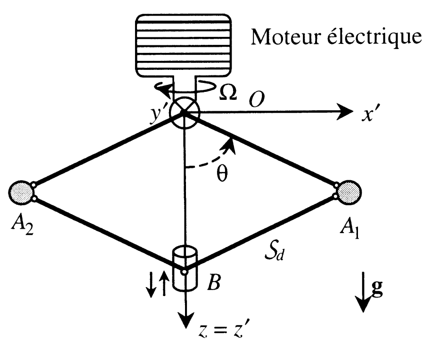

Figure A3

a) Quelle est, en fonction de $\boldsymbol{\Omega}$ et $\mathbf{M}_m$, la puissance fournie par le moteur au système articulé $\mathcal{S}_d$ dans $\mathcal{R}$?
Que vaut cette puissance dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au plan du losange ?
L'énergie mécanique de $\mathcal{S}_d$ se conserve-t-elle dans $\mathcal{R}$? Pourquoi ?

Tournez la page S.V.P.

b) Etablir l'expression de l'énergie cinétique E'_k de $\mathcal{S}_d$, par rapport au référentiel tournant $\mathcal{R}'$, en fonction de $\dot{\theta}$.

c) Trouver l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{p,g}$ du système, en fonction de θ. On prendra l'origine de cette énergie en $\theta = \pi/2$.

d) Montrer que, dans le référentiel $\mathcal{R}'$ tournant à la vitesse angulaire constante Ω, on doit tenir compte d'une énergie potentielle supplémentaire, d'expression : $E'_{p,c} = -\alpha m l^2 \Omega^2 \sin^2\theta$, si son origine est prise en $\theta = 0$, α étant un facteur numérique que l'on déterminera. Quelle est la nature physique de cette énergie potentielle ?

e) L'énergie potentielle totale E'_p dans $\mathcal{R}'$ peut se mettre sous la forme :

$$E'_p = E_0\left(-\cos\theta - \frac{u^2}{2}\sin^2\theta\right)$$

E_0 et u étant deux quantités positives que l'on exprimera en fonction de m, g, l, Ω et $\omega_0 = (g/l)^{1/2}$. Calculer E_0 et ω_0 en précisant leurs unités SI.

4. Positions d'équilibre du système astreint à tourner uniformément

a) Quelles sont les positions d'équilibre de $\mathcal{S}_d$ dans $\mathcal{R}'$, en rotation uniforme à la vitesse angulaire Ω ? Représenter, dans les trois cas, $u \ll 1$, $u \gg 1$ et $u = \sqrt{2}$, le graphe de $f(\theta) = E'_p/E_0$ pour $0 \le \theta \le \pi/2$.

b) Etudier la stabilité des positions d'équilibre. Représenter l'allure du graphe donnant la variation de la position d'équilibre stable θ_e de $\mathcal{S}_d$ en fonction de u. On veut que la position d'équilibre stable soit $\theta_e = 45°$. Quelle est, en tour par minute, la vitesse de rotation Ω correspondante ? Application numérique.

5. Influence d'un ressort vertical

Entre le point inférieur B du losange articulé et un point fixe F situé sur l'axe de rotation Oz, à une distance h de O, on place un ressort, de raideur K et de longueur à vide l_0 (Figure A4). On règle la position de F de telle sorte que $h = l_0 + 2l$.

a) On introduit la quantité $\omega_r = (K/m)^{1/2}$ et $\eta^2 = 2(\omega_r/\omega_0)^2$. Quelles sont, en fonction de θ, les expressions de l'énergie potentielle élastique introduite par le ressort et de l'énergie potentielle totale du système ?

b) Trouver, en fonction de u et η, les nouvelles positions d'équilibre du système lorsque le moteur impose la vitesse de rotation constante Ω. Etudier leur stabilité.

c) Etablir, en fonction de l, u et η, l'allongement Δl_r du ressort, pour une position d'équilibre différente de $\theta = 0$.

d) On se place dans le cas où $\omega_r = \omega_0$. Quelle doit être la nouvelle vitesse de rotation Ω pour que la position $\theta = 45°$ soit à nouveau une position d'équilibre stable ?

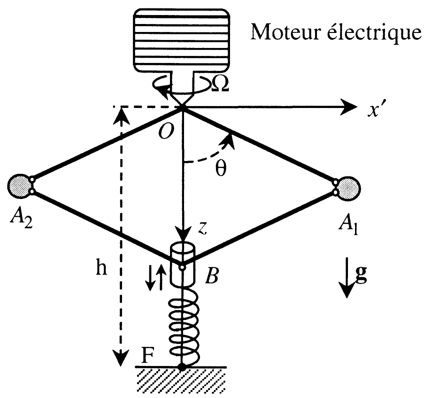

Figure A4

B. Influence du rayonnement et de la gravitation dans l'étude d'un gaz parfait

On se propose d'étudier l'influence du rayonnement et de l'interaction gravitationnelle mutuelle sur le comportement d'un gaz parfait. Cette influence joue un rôle essentiel en astrophysique.

1. Energie interne et entropie d'un gaz parfait monoatomique

a) A l'aide de considérations simples, retrouver l'expression $U = 3nRT/2$ de l'énergie interne de n moles d'un gaz parfait monoatomique, en fonction de la température thermodynamique T. En déduire la capacité thermique molaire à volume constant C_{vm} du gaz, ainsi que sa capacité thermique molaire à pression constante. Quelle est la valeur du rapport $\gamma = C_{pm}/C_{vm}$?

b) Etablir l'expression de l'entropie de n moles d'un gaz parfait monoatomique, en fonction de la température T et du volume V. Commenter le rôle de la constante additive qui apparaît dans cette expression.

c) Le gaz parfait considéré se détend au cours d'une évolution réversible isentropique. Etablir la relation entre T et V. Calculer la variation de température d'un gaz parfait, dont la température initiale est $T_i = 200\text{K}$, lorsque son volume est multiplié par dix.

Tournez la page S.V.P.

d) Le gaz reçoit de la chaleur d'une seule source extérieure, de telle sorte que son évolution soit réversible. Cette évolution est donc isotherme, à la température T de la source. Effectuer un bilan énergétique et un bilan entropique pour une mole d'un gaz parfait monoatomique subissant, à la température $T = 300\,\text{K}$, une détente, au cours de laquelle son volume est multiplié par dix. On constate que le gaz fournit du travail alors qu'il est en relation avec une seule source. Un tel résultat n'est pas en contradiction avec l'énoncé de Lord Kelvin du deuxième principe de la thermodynamique. Pourquoi ?

e) On considère un système isolé $\mathcal{S}$, constitué de deux compartiments $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$, remplis d'argon, séparés par une cloison diatherme, rigide et fixe ; initialement, les compartiments, de même volume, contenaient chacun une mole de gaz à des températures différentes. On admet que l'énergie interne et l'entropie de $\mathcal{S}$ se mettent sous la forme de sommes des énergies internes et des entropies des deux parties. Rappeler l'expression générale reliant les différentielles de l'entropie, de l'énergie interne et du volume, pour un système thermodynamique. Montrer, en appliquant les deux premiers principes de la thermodynamique, que la variation élémentaire d'entropie dS du système $\mathcal{S}$ a pour expression :

$$\mathrm{d}S = C\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\mathrm{d}U_1$$

$\mathrm{d}U_1$ étant la variation d'énergie interne de $\mathcal{S}_1$, T_1 et T_2 les températures respectives de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$; C est un facteur que l'on déterminera. En déduire le sens des échanges thermiques et la condition d'équilibre thermique. Le système est stable si la dérivée seconde de S par rapport à U_1 est négative à l'équilibre thermique. Exprimer, en fonction de la capacité thermique molaire à volume constant C_{vm} de l'argon, la dérivée seconde de S par rapport à U_1 à l'équilibre thermique. En déduire la condition à laquelle doit satisfaire C_{vm} pour que le système soit stable.

2. Thermodynamique du rayonnement

Au rayonnement émis par un corps noir, dont l'énergie électromagnétique volumique totale est w, correspond un gaz de photons dont la pression de radiation est :

$$p_r = \frac{w}{3}$$

a) On établit la relation générale suivante entre énergie interne U et pression p :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

V étant le volume et T la température. En l'appliquant au rayonnement pour lequel $U = U_r = wV$, où w ne dépend que de T, en déduire que : $w = aT^4$, a étant un coefficient dont on précisera l'unité SI.

b) On rappelle l'expression de l'énergie électromagnétique volumique spectrale w_ν, à la température T, donnée par la loi de Planck :

$$w_\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{\exp(\beta h\nu)-1}$$

Quelle est la signification physique de β ? Calculer l'énergie électromagnétique volumique totale w. On utilisera la valeur numérique de l'intégrale suivante :

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{\exp x - 1}\,dx = \frac{\pi^4}{15}$$

Relier a aux constantes fondamentales de la physique et calculer sa valeur SI.

c) Montrer que l'entropie associée au rayonnement a pour expression $S = AT^3V$, à une constante additive près, A étant une constante que l'on déterminera en fonction de a. En déduire qu'un rayonnement isentropique satisfait à une équation de la forme $TV^{\gamma_r - 1} = Cte$, γ_r étant un facteur que l'on calculera.

3. Thermodynamique d'un gaz parfait en présence de rayonnement

On considère un système de n moles d'un gaz parfait contenu dans une enceinte de volume V. Le rayonnement électromagnétique dans ce récipient est celui d'un gaz de photons en équilibre thermique avec le gaz parfait, à la température T. On admet que l'énergie interne et la pression s'obtiennent en ajoutant l'énergie interne de rayonnement U_r et la pression de rayonnement p_r aux quantités analogues U_{gp} et p_{gp} relatives au gaz parfait :

$$U = U_{gp} + U_r \quad \text{et} \quad p = p_{gp} + p_r$$

Dans la suite, on désigne par γ le rapport des capacités thermiques à pression et volume constants pour le gaz parfait et par α le rapport de la pression p_{gp} sur la pression totale p.

a) En appliquant les deux premiers principes de la thermodynamique à une évolution réversible élémentaire, établir l'expression suivante de la variation élémentaire de l'entropie du système :

$$K\,\mathrm{d}S = \frac{V}{T}\left(\frac{p_{gp}}{\gamma - 1} + 12p_r\right)\mathrm{d}T + \left(p_{gp} + 4p_r\right)\mathrm{d}V$$

K étant une quantité dont on donnera la dimension physique et que l'on exprimera en fonction de la température.

b) En déduire l'expression de l'entropie du système. Le résultat obtenu était-il prévisible ?

c) Trouver, en fonction de α et γ, l'expression du facteur Γ, tel que, au cours d'une évolution isentropique, on ait : $dT/T + (\Gamma - 1)dV/V = 0$.

Tournez la page S.V.P.

d) Quelles sont alors les valeurs de Γ pour $\alpha = 1$ et pour $\alpha = 0$? Pour $\alpha = 1$, on envisagera les cas des gaz parfaits monoatomiques et diatomiques.

4. Thermodynamique d'un gaz parfait autogravitant.

Un gaz parfait est dit autogravitant lorsqu'on doit tenir compte de l'interaction gravitationnelle mutuelle entre les particules qui le constituent. On admet les deux hypothèses suivantes :

i) L'énergie interne totale U est la somme de l'énergie interne du gaz parfait U_{gp} et de l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle $E_{p,g}$.

ii) Dans le référentiel du centre de masse du système, il existe, entre l'énergie cinétique E_k, associée aux mouvements des centres de masse des particules, et son énergie potentielle de gravitation $E_{p,g}$, la relation suivante :

$$2E_k + E_{p,g} = 0$$

a) Montrer que cette dernière relation est précisément celle qui existe entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de gravitation d'un satellite en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre, par rapport au référentiel géocentrique. Commenter, dans ce cas, la phrase apparemment paradoxale suivante : « La vitesse du satellite augmente lorsqu'il est soumis à une force de freinage ».

b) On rappelle les relations $E_k = 3nRT/2$ et $U_{gp} = n\,C_{vm}T$ entre E_k, U_{gp} et la température T. Etablir l'expression suivante de l'énergie interne totale U du système :

$$U = nBT(4-3\gamma)$$

n étant le nombre de moles et B un coefficient que l'on exprimera en fonction de C_{vm}.

c) Trouver la capacité thermique molaire à volume constant C_{vm}^{g}, obtenue en tenant compte de la gravitation, en fonction de γ et C_{vm}. Etudier les cas où $\gamma = 5/3$ et $\gamma = 7/5$. Commenter à l'aide du résultat obtenu à la question B1.e.

Fin de l'énoncé.