ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2000 FILIÈRE **PC**

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices **est autorisée** pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Le but de ce problème est l'étude d'approximations discrètes de solutions d'équations différentielles avec conditions aux extrémités de l'intervalle de définition.

Première partie

Soit n un entier fixé, $n \geq 1$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles à n lignes, et I la matrice identité à n lignes. On note X_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, les coefficients d'une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On identifie un vecteur V de $\mathbf{R}^n$, de composantes $v_1, \dots, v_n$ dans la base canonique, à la matrice colonne $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. On désigne par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de $\mathbf{R}^n$.

1. Pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on pose

$$N(X) = \sup_{\substack{V \in \mathbf{R}^n \\ V \neq 0}} \left(\frac{\|XV\|}{\|V\|} \right) .$$

a) Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

b) Montrer que, pour toutes matrices X, $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $N(XY) \leq N(X)\,N(Y)$.

Cette propriété est-elle vérifiée si l'on remplace la norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par la norme N_∞ définie par

$$N_\infty(X) = \sup_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |X_{ij}| \ ?$$

2. Soit $(X_p)_{p=1,2,\dots}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et X une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que X est inversible et que $\lim_{p \to +\infty} X_p = X$.

a) Montrer que, pour p assez grand, X_p est inversible.

b) Soit $V \in \mathbf{R}^n$. Montrer que, si X_p est inversible,

$$\|X_p^{-1}V - X^{-1}V\| \leq N(X^{-1})N(X - X_p)\|X_p^{-1}V\| \, .$$

En déduire qu'il existe un entier p_0 et un nombre C indépendant de p tel que, pour $p \geq p_0$,

$$\|X_p^{-1}V\| \leq C\|X^{-1}V\| \, .$$

c) Montrer que $\lim\limits_{p \to +\infty} N(X_p^{-1} - X^{-1}) = 0$.

3. On dit qu'une matrice $X = (X_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ possède la propriété (P) si les trois conditions suivantes sont satisfaites

$$\begin{cases} X_{ii} > 0 & \text{pour tout } i = 1, \dots, n & (P_1) \\ X_{ij} \leq 0 & \text{pour tous } i, j = 1, \dots, n \text{ tels que } i \neq j & (P_2) \\ \sum_{j=1}^{n} X_{ij} > 0 & \text{pour tout } i = 1, \dots, n \, . & (P_3) \end{cases}$$

Soit X une matrice qui possède la propriété (P) et soit $V \in \mathbf{R}^n$, de composantes $v_1, \dots, v_n$.

a) Montrer que si $XV = 0$, alors $V = 0$. [On considérera i_0 tel que $|v_{i_0}| = \max\limits_{i=1,\dots,n} |v_i|$.]

b) On suppose que XV a toutes ses composantes positives ou nulles. Montrer que V a toutes ses composantes positives ou nulles. [On considérera i_1 tel que $v_{i_1} = \min\limits_{i=1,\dots,n} v_i$.]

4. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que X est inversible et que $X = \lim\limits_{p \to +\infty} X_p$, où chaque X_p est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui possède la propriété (P). Montrer que les coefficients de la matrice inverse X^{-1} sont positifs ou nuls.

Deuxième partie

Soit f une fonction à valeurs réelles, de classe C^2 sur l'intervalle $[0, 1]$.

5.a) Montrer qu'il existe une unique fonction u de classe C^4 sur $[0, 1]$ telle que

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \, . \end{cases} \tag{1}$$

b) Montrer que si $f \geq 0$, alors $u \geq 0$.

c) On choisit pour f la fonction constante égale à 1. Déterminer la solution $\hat{u}$ du problème (1) dans ce cas.

Soit n un entier, $n \geq 1$. On pose $h = \dfrac{1}{n+1}$ et l'on considère la subdivision $(x_i)_{i=0,1,\ldots,n+1}$ de l'intervalle $[0,1]$ telle que $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$ et $x_{i+1} - x_i = h$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$.

6.a) Soit u une fonction à valeurs réelles de classe C^4 sur $[0,1]$. Montrer que, pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$|u''(x_i) - \frac{1}{h^2}(u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)| ,$$

où $u^{(4)}$ désigne la dérivée quatrième de u.

b) Que devient cette inégalité dans le cas où u est la fonction $\widehat{u}$ trouvée à la question **5.c)** ?

7. Soit $F \in \mathbf{R}^n$, de composantes $f_1, \ldots, f_n$. On désigne par U un vecteur de $\mathbf{R}^n$, de composantes $u_1, \ldots, u_n$ et l'on pose $u_0 = 0$, $u_{n+1} = 0$.

a) Écrire sous forme matricielle $AU = F$ le système (2) linéaire en les inconnues $u_1, \ldots, u_n$:

$$\frac{1}{h^2}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) = f_i \ , \quad 1 \leq i \leq n \ . \tag{2}$$

b) Montrer que, pour tout vecteur V de $\mathbf{R}^n$, le produit scalaire canonique $(AV|V)$ peut s'écrire comme une somme de carrés de nombres réels.

c) En déduire que la matrice A est inversible.

8.a) Soit $B = A^{-1}$ l'inverse de A. Montrer que les coefficients B_{ij} de B sont positifs ou nuls.

b) Soit $\widehat{F}$ le vecteur de composantes toutes égales à 1. Déterminer les composantes de $B\widehat{F}$ à l'aide des valeurs de la fonction $\widehat{u}$ trouvée à la question **5.c)**. En déduire que, pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n} B_{ij} \leq \frac{1}{8} \ .$$

9. On suppose que $(u_1, \ldots, u_n)$ est la solution du système (2) avec $f_i = f(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, et l'on désigne par $u(x_1), \ldots, u(x_n)$ les valeurs prises en $x_1, \ldots, x_n$ par la solution u du problème (1).

a) Donner une majoration de $|u_i - u(x_i)|$, valable pour tout $i = 1, \ldots, n$, en fonction de h et de la fonction f''.

b) En quel sens peut-on dire que la solution du problème linéaire (2) avec $f_i = f(x_i)$ approxime la solution du problème (1) ?

c) On choisit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{25}{\sqrt{x^4 + 5}}$.

Trouver une valeur de l'entier n qui assure $|u_i - u(x_i)| < 10^{-4}$, pour tout $i = 1, \ldots, n$.

Troisième partie

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0,1]$ comme dans la deuxième partie. Pour tout entier $p \geq 1$, on considère le problème

$$\begin{cases} -u'' + \dfrac{1}{p^2}u = f \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0\,. \end{cases} \tag{3}$$

10.a) Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$, il existe une unique fonction $u^{[p]}$ de classe C^4 sur $[0,1]$ qui est solution du problème (3).

b) Montrer que la suite de fonctions $(u^{[p]})_{p\geq 1}$ tend simplement, quand p tend vers $+\infty$, vers une fonction u de classe C^4 sur $[0,1]$, et que u est solution du problème (1) de la deuxième partie.

11. On choisit pour f la fonction constante égale à 1 et l'on note $\widehat{u}^{[p]}$ la solution du problème (3) dans ce cas.

a) Déterminer $\widehat{u}^{[p]}$.

b) Pour tout entier $p \geq 1$, étudier les variations de la fonction $x \in [0,1] \mapsto \widehat{u}^{[p]}(x) \in \mathbf{R}$.

c) Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$ et pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq \widehat{u}^{[p]}(x) < \frac{1}{8}$.

12. On reprend les notations de la deuxième partie.

a) Montrer que pour chaque entier $p \geq 1$, le système linéaire

$$(A + \frac{1}{p^2}I)U = F \tag{4}$$

a une solution unique, notée $U^{[p]}$. Que peut-on dire de $\lim\limits_{p\to+\infty} U^{[p]}$?

b) Soit $(u_1^{[p]}, \dots, u_n^{[p]})$ la solution du système (4) avec $f_i = f(x_i)$, $1 \leq i \leq n$. Donner une majoration de $|u_i^{[p]} - u^{[p]}(x_i)|$, valable pour tout $i = 1, \dots, n$, en fonction de h, p, f et f''.

* *
*