

## X/ENS Physique A PC 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Amélie Gay (ENS Lyon) ; il a été relu par Louis Salkin (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

---

Ce sujet s'intéresse à l'imagerie médicale par tomographie photoacoustique. Il est composé de quatre parties : trois sur ses mécanismes et son fonctionnement, une sur son application à la circulation sanguine. Elles peuvent se traiter indépendamment les unes des autres bien que les données numériques utiles soient fournies au fur et à mesure de l'énoncé.

- La première partie étudie la source laser à l'origine de l'effet photoacoustique. Cette partie plutôt qualitative fait appel à quelques notions de physique du laser et d'optique ondulatoire.
- La deuxième partie porte sur la diffusion thermique consécutive à l'absorption de la lumière par des nanoparticules d'or utilisées comme agent de contraste. Pour cette partie, il faut savoir faire des bilans thermiques et être à l'aise avec les équations différentielles.
- La troisième partie propose d'abord d'étudier les ondes acoustiques générées par les variations de température à la surface des nanoparticules d'or. Puis elle s'intéresse à la détection des ondes acoustiques par des capteurs et aux limites de cette imagerie. Cette étude nécessite de mobiliser ses connaissances sur les ondes acoustiques. Elle utilise également une analogie avec l'optique.
- La dernière partie ouvre sur une application avec la mesure de la vitesse du sang dans l'aorte et dans les capillaires. L'effet Doppler et la mécanique des fluides sont au centre de cette partie, leur maîtrise est indispensable.

Ce sujet balaie la totalité de la mécanique des fluides, incluant l'acoustique, ainsi que la diffusion thermique et les ondes. Comme souvent à l'X, la calculatrice n'était pas autorisée ; cependant, les applications numériques étaient relativement aisées.

## INDICATIONS

### Partie I

- 1 La charge élémentaire vaut  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  C.
- 2 Il faut utiliser les formules trigonométriques pour linéariser la relation trouvée.
- 4 Utiliser l'ouverture angulaire d'une tache de diffraction puis le fait que la tache est située à la distance focale de l'objectif.

### Partie II

- 6 L'équation de diffusion thermique s'établit en faisant un bilan d'enthalpie sur une calotte sphérique d'épaisseur  $dr$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$ .
- 11 Il faut constater que  $P_V$  est proportionnelle à la dérivée de  $T_g$ .
- 12 Poser  $r T(r, t) = f(u)$  avec  $u = r/(2\sqrt{Dt})$  pour trouver une solution particulière. Une autre solution particulière est  $T(r, t) = C^{te}$ .

### Partie III

- 13 La vitesse se met sous la forme  $\vec{v} = v(r, t) \vec{e}_r$ . Effectuer le bilan de masse sur une calotte sphérique d'épaisseur  $dr$ .
- 16 Ne pas oublier que  $\partial_t^2 T(r, t) \propto \delta(r)$ . Par conséquent, en dehors de  $r = 0$ , l'équation est une équation de d'Alembert sans terme source. Avec le formulaire, il faut obtenir une équation différentielle pour  $r p_a$ .
- 18 Déterminer l'amplitude de la pression à la surface de la particule grâce au graphique.
- 19 Pour faire les mesures, les trains d'onde doivent être réceptionnés dans leur ordre d'émission.
- 23 Faire un schéma et distinguer deux cas suivant la parité du nombre de capteurs.

### Partie IV

- 24 Cette question traite de l'effet Doppler : on cherche à établir les temps de réception de deux signaux émis à deux instants séparés d'une période  $T$ .
- 27 L'énoncé indique que l'écoulement est irrotationnel selon l'axe  $(Oz)$ . Ainsi, la composante suivant  $\vec{e}_z$  de  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}$  est nulle.
- 29 La définition du coefficient de friction est erronée, il faut utiliser celle donnée sur le diagramme de Moody à la question 30 :

$$\xi = \frac{2 D \Delta P}{\rho \bar{v}^2 L}$$

- 30 La rugosité est le rapport de la hauteur caractéristique  $\varepsilon$  des rugosités et du diamètre de la conduite. Supposer que l'aorte a une paroi lisse.
- 31 Faire une analogie électrique avec la loi d'Ohm.

## I. ÉTUDE DE LA SOURCE LASER

**1** L'émission radiative se produit entre  $E_2 = 1,45$  eV et  $E_1 = 0,2$  eV. Ainsi, les photons émis ont une énergie  $E = E_2 - E_1 = 1,25$  eV, soit en joules grâce à la charge élémentaire  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  C,

$$E = 1,6 \times 10^{-19} \times 1,25 = 2,0 \times 10^{-19} \text{ J}$$

La quantité d'énergie correspondant à un électron-volt est celle de l'énergie électrostatique ( $E_{el} = qV$ ) gagnée lorsque la charge élémentaire  $e$  est déplacée entre deux points dont le potentiel électrostatique diffère d'un volt.

Calculons la longueur d'onde  $\lambda_0$  des photons émis grâce à la relation de Planck-Einstein  $E = h\nu_0$  et  $\lambda_0 = c/\nu_0$  :

$$\lambda_0 = \frac{hc}{E} = \frac{20/3 \times 10^{-34} \times 3,0 \times 10^8}{2,0 \times 10^{-19}} = 1,0 \times 10^{-6} \text{ m} = 1,0 \mu\text{m}$$

Ce faisceau appartient au rayonnement infrarouge du spectre électromagnétique.

**2** Si  $E_1(t) = E_1 \sin(\omega_1 t)$  et  $E_2(t) = E_2 \sin(\omega_2 t)$  sont les deux champs en entrée du cristal, alors le champ électrique en sortie de celui-ci s'écrit

$$\begin{aligned} E_s(t) &\propto (E_1(t) + E_2(t))^2 \\ &\propto E_1^2 \sin^2(\omega_1 t) + E_2^2 \sin^2(\omega_2 t) + 2E_1 E_2 \sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t) \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} E_s(t) &\propto E_1^2 \left( \frac{1 - \cos(2\omega_1 t)}{2} \right) + E_2^2 \left( \frac{1 - \cos(2\omega_2 t)}{2} \right) \\ &\quad + E_1 E_2 (\cos((\omega_1 - \omega_2)t) - \cos((\omega_1 + \omega_2)t)) \end{aligned}$$

L'onde électrique de sortie est alors composée des pulsations  $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$ ,  $\omega_1 + \omega_2$  et  $|\omega_1 - \omega_2|$ . Comme à l'origine, elle est issue de l'interaction d'une onde de pulsation  $\omega_0$  avec elle-même, elle est composée de pulsations  $\omega_n$  multiples de  $\omega_0$  :  $\omega_n = n\omega_0$  avec  $n$  entier non nul. Ainsi, en utilisant le fait que  $\lambda_n = 2\pi c/\omega_n$ , les longueurs d'onde accessibles sont

$$\lambda_n = \frac{1}{n} \lambda_0$$

Elles sont donc toutes inférieures à la longueur d'onde d'origine  $\lambda_0$ .

**3** Pour imager en profondeur, il faut choisir une longueur d'onde telle que les absorbances de l'hémoglobine et de l'eau soient les plus faibles possibles. Si on choisit que le critère de transparence correspond à une absorbance inférieure à  $10 \text{ cm}^{-1}$ ,

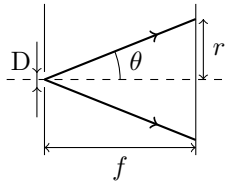
La fenêtre de transparence se situe entre 700 et 1 500 nm.

La longueur d'onde à choisir est celle obtenue sans cristal :  $\lambda_0 = 1 000$  nm.

4 Le faisceau laser est diffracté par une pupille circulaire de diamètre  $D$  et de focale  $f$ , d'où l'ouverture angulaire est donnée par

$$\theta = \frac{\lambda_0}{D} = \frac{1,0 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-3}} = 1 \times 10^{-3} \ll 1$$

Comme les rayons lumineux sont issus d'un laser, ils sont quasiment parallèles entre eux et la tache de diffraction est focalisée à la distance focale  $f$ .



D'après le schéma ci-dessus, son rayon  $r$  est donné par

$$\tan \theta = \frac{r}{f}$$

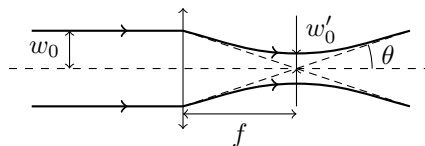
Comme  $\theta \ll 1$ ,  $\tan \theta \sim \theta$  et  $r \simeq \lambda_0 f/D$ . Sa surface  $S$  est alors

$$S \simeq \pi \left( \frac{\lambda_0 f}{D} \right)^2 = \pi \left( \frac{1,0 \times 10^{-6} \times 1 \times 10^{-2}}{1 \times 10^{-3}} \right)^2 = 3 \times 10^{-6} \text{ cm}^2$$

Cette expression du rayon de la tache de diffraction est l'ordre de grandeur de ce qui est appelé la tache d'Airy issue de la diffraction de rayons lumineux provenant de l'infini, donc parallèles entre eux, et passant par une pupille circulaire :

$$r = \frac{1,22 \lambda_0 f}{D}$$

Au lieu de considérer que le faisceau laser est constitué de rayons parallèles entre eux, on peut supposer que le faisceau est gaussien avec des rayons paraxiaux. La lentille convergente est placée de telle sorte que la longueur de Rayleigh  $L_R$  du faisceau laser soit très supérieure à la distance focale  $f$  de cette première. Par conséquent, les rayons arrivent quasiment parallèles sur la lentille et forment un faisceau de largeur  $w_0 = 0,5$  mm. Ils sont focalisés sur le plan focal en une tache de rayon  $w'_0$ . Ce rayon minimum du faisceau appelé « *waist* » est lié à l'angle d'ouverture  $\theta$  représenté sur le schéma ci-dessous par  $\theta = \lambda_0/\pi w'_0$ .



Géométriquement,  $\tan \theta = \frac{w_0}{f}$

Comme  $w_0/f = 0,05 \ll 1$ ,  $\tan \theta \sim \theta$  et  $w'_0 \simeq \lambda_0 f/\pi w_0$ . La surface de la tache est alors

$$S \simeq \pi \left( \frac{\lambda_0 f}{\pi w_0} \right)^2 = 1 \times 10^{-6} \text{ cm}^2$$

On retrouve le même ordre de grandeur que précédemment, car le phénomène de diffraction est aussi en jeu.