e3a Mathématiques PC 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Angèle Niclas (ENS Lyon) ; il a été relu par Antoine Barrier (ENS Paris-Saclay) et Tristan Poullaouec (professeur en CPGE).

Le sujet comporte quatre exercices indépendants portant sur l'analyse et l'algèbre.

- L'exercice 1 a pour objet le calcul de la somme de deux séries convergentes,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$$

  Cet exercice demande une bonne maîtrise des théorèmes d'intégration terme à terme et des conditions de convergence d'une série.

- Le deuxième exercice s'intéresse à l'application linéaire L qui associe, à tout polynôme $f \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} f(t) \mathrm{e}^{t} \, \mathrm{d}t$$

  Après une question de cours, on prouve que L est un endomorphisme puis un automorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, avant de rechercher ses éléments propres. Cet exercice nécessite de la dextérité dans le maniement des espaces vectoriels de fonctions.

- L'exercice 3 étudie deux suites définies par une relation de récurrence double

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

  On prouve que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci, dont on connaît une expression pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction du nombre d'or. Après avoir mis le problème sous forme matricielle, on s'intéresse à des suites et des séries de matrices dont on calcule les limites.

- Le dernier exercice étudie un produit scalaire introduit dans l'énoncé. On redémontre des résultats généraux sur les polynômes d'interpolation de Lagrange, avant de s'intéresser à des projetés orthogonaux sur un sous-espace vectoriel.

Le sujet aborde un grand nombre de chapitres du programme des deux années de classes préparatoires et constitue un bon exercice de révision générale de l'ensemble du cours. Il ne présente pas de difficulté majeure et les questions sont très guidées.

Indications

Exercice 1

1.1 Appliquer le théorème spécial des séries alternées.

1.2.1 Poser $f_n(x) = x^{2n}(1-x)$ et utiliser le théorème d'intégration terme à terme dont l'une des hypothèses est

$$\sum \int_0^1 |f_n(x)| \,\mathrm{d}x \text{ converge}$$

1.2.2 Utiliser le résultat de la question 1.2.1 puis calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1.3 Reconnaître une série entière et calculer son rayon de convergence avec la règle de d'Alembert.

1.4.2 Utiliser un théorème d'intégration terme à terme comme dans la question 1.2.1 puis le résultat de la question 1.4.1.

Exercice 2

2.1 Définir le taux d'accroissement $\tau(h)$ de F_1 entre x et $x+h$ et remarquer, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe un réel x_h vérifiant $|x_h - x| \leqslant |h|$ et $\tau(h) = f(x_h)$.

2.2 Décomposer F en deux parties afin d'utiliser le résultat de la question 2.1 pour $a = 1$.

2.3 Montrer que $f_k(t) \underset{t\to-\infty}{=} \mathrm{o}\,(1/t^2)$ en utilisant les croissances comparées.

2.4 Montrer que l'application L est bien définie en utilisant le résultat de la question 2.2.

2.5 Utiliser le résultat de la question 2.2 pour dériver g.

2.6 Appliquer le résultat de la question 2.5 à $g = \mathrm{L}(f) = 0_{\mathrm{E}_n}$.

2.7.2 Calculer $\mathrm{L}(e_{k+1})$ à l'aide d'une intégration par parties.

2.7.3 Procéder par récurrence en utilisant le résultat des questions 2.7.1 et 2.7.2 pour montrer que $\mathrm{L}(e_k) \in \mathrm{E}_n$ pour tout $k \in [\![\,0\,;n\,]\!]$.

2.8 Remarquer que E_n est de dimension finie et utiliser le résultat de la question 2.6.

2.9.2 Appliquer le résultat de la question 2.5 à $g = \lambda f = \mathrm{L}(f)$.

2.9.4 Considérer une solution polynomiale de $(*)$ et chercher son degré en fonction de la valeur de λ.

2.9.5 Utiliser le résultat des questions 2.9.2 et 2.9.4 pour trouver les vecteurs propres.

2.10 Utiliser le résultat de la question 2.5.

2.12 Utiliser le résultat de la question 2.11.

Exercice 3

3.1 Utiliser les relations entre coefficients et racines.

3.2.2 Écrire la forme générale des suites $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de la question 3.2.1 puis utiliser les conditions initiales.

3.4 Calculer le polynôme caractéristique de M et utiliser les résultats de la question 3.1.

3.6 Utiliser le résultat de la question 3.5 et le développement en série entière de la fonction exponentielle.

3.7 Utiliser le résultat de la question 3.4.

Exercice 4

4.3.2 Calculer $(\mathrm{L}_k \mid \mathrm{L}_i)$ pour tout $(k,i) \in [\![0\,;n]\!]^2$.

4.3.3 Utiliser le résultat de la question 4.3.2 pour montrer que $\mathscr{B}$ est libre.

4.3.4 Utiliser la décomposition d'un vecteur dans une base orthonormale.

4.3.5 Appliquer le résultat de la question 4.3.4 à $\sum\limits_{j=0}^{n} \mathrm{L}_j$ et à 1.

4.4.1 Utiliser le résultat de la question 4.2 pour exprimer H comme l'orthogonal d'un espace vectoriel simple.

4.5.1 Utiliser la formule du projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel.

4.5.2 Lier la distance à calculer et le projeté obtenu à la question 4.5.1.

Exercice 1

1.1 Posons $u_n = (-1)^{n+1}/n$ et $v_n = 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et appliquons le théorème spécial des séries alternées à $\sum u_n$.

- Pour tout $n \geqslant 1$, on remarque que $u_n = (-1)^{n+1} v_n$ avec $v_n \geqslant 0$.
- La suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante puisque pour tout $n \geqslant 1$,
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$$
- Enfin, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$.

Les hypothèses du théorème spécial des séries alternées sont donc vérifiées et on peut affirmer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge. Finalement, on conclut que

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ converge.}}$$

1.2.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons la fonction $f_n : x \mapsto x^{2n}(1-x)$ sur $[\,0\,;1\,[$. Comme suggéré dans l'énoncé, vérifions les hypothèses de l'un des deux théorèmes d'intégration terme à terme du cours.

- Les fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont par définition polynomiales, donc continues et intégrables sur l'intervalle $[\,0\,;1\,[$.
- Soient $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ et $x \in [\,0\,;1\,[$, alors
$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} x^{2n}(1-x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (x^2)^n = (1-x)\frac{1-(x^2)^{\mathrm{N}+1}}{1-x^2}$$
en reconnaissant la somme d'une série géométrique. Comme $x^2 \in [\,0\,;1\,[$,
$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} f_n(x) \xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{} \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1-x}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1+x}$$
Soit f la fonction définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $f(x) = 1/(1+x)$. La série $\sum f_n$ converge alors simplement vers la fonction continue f sur $[\,0\,;1\,[$.
- Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [\,0\,;1\,[$, remarquons que $|f_n(x)| = f_n(x)$ et que
$$\int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^{2n} - x^{2n+1})\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$
En particulier, pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2n+1} - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2n+2}\\ &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} + \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2}\\ &= \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant 2\mathrm{N}+2\\ n \text{ impair}}} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant 2\mathrm{N}+2\\ n \text{ pair}}} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\end{aligned}$$
$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{2\mathrm{N}+2} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$