Mines Maths 2 MP 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Christophe Fiszka (professeur en CPGE) ; il a été relu par Tristan Poullaouec (professeur en CPGE) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Ce sujet propose d'étudier les propriétés des matrices symétriques et des fonctions de matrices symétriques.

- Dans la première partie, on introduit les matrices de permutation en tant que cas particuliers de matrices orthogonales.
- La deuxième partie commence avec le théorème spectral et des polynômes de matrices. Ensuite, on définit deux applications dont on étudie les propriétés via une brève incursion en analyse, avec une étude de convergence simple et uniforme sur les ensembles des applications de I dans $\mathbb{R}$ et de $\mathrm{S}_n(\mathrm{I})$ dans $\mathbb{R}$.
- La partie 3 montre que la restriction du rayon spectral ρ à l'espace des matrices symétriques réelles définit une norme. Pour rappel,
$$\forall\,\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \qquad \rho(\mathrm{M}) = \max_{\lambda \in \mathrm{sp}\,(\mathrm{M})} |\lambda|$$
- Les deux dernières parties traitent des propriétés de continuité et de convexité des fonctions de matrices symétriques.

La principale originalité (et difficulté) de ce sujet réside dans la compréhension de l'énoncé. Par exemple, l'application u, définie comme application sur des ensembles d'applications matricielles, est difficile à appréhender. Il fallait être rigoureux dans la manipulation des différents objets mathématiques pour éviter les confusions.

Le sujet comporte plusieurs questions classiques (compacité de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, polynômes interpolateurs de Lagrange...) ce qui peut en faire un sujet de révision sur la réduction des matrices symétriques, les polynômes de matrices et la topologie des espaces matriciels.

Indications

Matrices de permutations

1 Rappelons la formule du produit matriciel. Si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{AB} \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ avec $[\mathrm{AB}]_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{p} [\mathrm{A}]_{i,k}[\mathrm{B}]_{k,j}$.

2 Pour vérifier que $\omega(\sigma)$ est orthogonale, il suffit d'établir que ${}^t\omega(\sigma)\,\omega(\sigma) = \mathrm{I}_n$.

4 Considérer une permutation σ pour laquelle $d_i{}' = d_{\sigma(i)}$ pour tout $i \in [\![\, 1\,;n \,]\!]$.

Fonctions de matrices symétriques

5 C'est une conséquence du théorème spectral.

6 Penser aux polynômes interpolateurs de Lagrange.

7 Utiliser la question précédente et pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, montrer que

$$\mathrm{P}\big({}^t\Omega\,\mathrm{diag}\,\big((s_i)_i\big)\Omega\big) = {}^t\Omega\,\mathrm{P}\big(\,\mathrm{diag}\,\big((s_i)_i\big)\big)\Omega = {}^t\Omega\,\mathrm{diag}\,\big(\big(\mathrm{P}(s_i)\big)_i\big)\Omega$$

9 La fonction u est injective mais non surjective dès que $n \geqslant 2$.

10 La réciproque est vraie. Appliquer l'égalité à $\mathrm{S} = x\mathrm{I}_n$ pour $x \in \mathrm{I}$.

Norme et convexité

12 Se ramener au cas d'une matrice diagonale à l'aide du théorème spectral.

13 Utiliser le résultat précédent pour la convexité et l'inégalité triangulaire avec ρ.

Continuité des fonctions symétriques

14 L'application déterminant $\det\colon \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une application polynomiale en les coefficients de la matrice.

15 Toute suite bornée d'un espace vectoriel de dimension finie admet une valeur d'adhérence.

16 À l'aide de la continuité de χ, justifier que $\chi_{\mathrm{M}} = \chi_{\mathrm{diag}(\lim \Lambda_{\alpha(k)})}$.

17 Penser à la caractérisation séquentielle de la continuité. En dimension finie, toute suite bornée avec une unique valeur d'adhérence est convergente.

18 Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé en tant qu'image réciproque d'une partie fermée par une application continue.

19 Utiliser la même démarche que pour la question 17.

Convexité des fonctions symétriques

20 De nouveau, se ramener au cas diagonal. Vérifier que $v(f)(\mathrm{S}) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(s_i)$.

22 Pour la réciproque, utiliser $\mathrm{A} = x\mathrm{I}_n$ et $\mathrm{B} = y\mathrm{I}_n$.

Matrices de permutations

1 Soit $(\sigma,\sigma') \in {\mathrm{B}_n}^2$. Par définition du produit matriciel, pour $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$

$$\big[\omega(\sigma)\omega(\sigma')\big]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \big[\omega(\sigma)\big]_{i,k}\big[\omega(\sigma')\big]_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)}\,\delta_{k\sigma'(j)}$$

Or, le terme $\delta_{k\sigma'(j)}$ vaut 1 si $k = \sigma'(j)$ et 0 sinon. La somme précédente se réduit à un unique terme $\delta_{i,\sigma(\sigma'(j))}$. Ainsi

$$\big[\omega(\sigma)\omega(\sigma')\big]_{i,j} = \delta_{i,\sigma\circ\sigma'(j)} = \big[\omega(\sigma\circ\sigma')\big]_{i,j}$$

Finalement, $\boxed{\omega(\sigma)\omega(\sigma') = \omega(\sigma\circ\sigma')}$

> Soit f_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice $\omega(\sigma)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}$.
>
> $$\forall i \in [\![1\,;n]\!] \qquad f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$$
>
> où $(e_1,\ldots,e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$. C'est l'endomorphisme qui permute les coordonnées : pour $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$,
>
> $$f_\sigma(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)})$$
>
> Avec σ' une seconde permutation, on trouve
>
> $$\begin{aligned}(f_\sigma\circ f_{\sigma'})(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= f_\sigma\big(f_{\sigma'}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\big)\\ &= f_\sigma(x_{\sigma'(1)},x_{\sigma'(2)},\ldots,x_{\sigma'(n)})\\ &= \big(x_{\sigma(\sigma'(1))},x_{\sigma(\sigma'(2))},\ldots,x_{\sigma(\sigma'(n))}\big)\\ (f_\sigma\circ f_{\sigma'})(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= f_{\sigma\circ\sigma'}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\end{aligned}$$
>
> Ainsi, $f_\sigma\circ f_{\sigma'} = f_{\sigma\circ\sigma'}$ et on retrouve $\omega(\sigma)\omega(\sigma') = \omega(\sigma\circ\sigma')$.

2 Soit $\sigma \in \mathrm{B}_n$. Soit $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$. Alors

$$\begin{aligned}\big[{}^t\omega(\sigma)\,\omega(\sigma)\big]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} \big[{}^t\omega(\sigma)\big]_{i,k}\big[\omega(\sigma)\big]_{k,j}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \big[\omega(\sigma)\big]_{k,i}\big[\omega(\sigma)\big]_{k,j}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \delta_{k,\sigma(i)}\,\delta_{k,\sigma(j)}\\ \big[{}^t\omega(\sigma)\,\omega(\sigma)\big]_{i,j} &= \delta_{\sigma(i),\sigma(j)}\end{aligned}$$

Précisons que la condition $\sigma(i) = \sigma(j)$ équivaut à $i = j$ puisque σ est une injection. En résumé,

$$\forall\,(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2 \qquad \big[{}^t\omega(\sigma)\,\omega(\sigma)\big]_{i,j} = \delta_{i,j}$$

De ce fait ${}^t\omega(\sigma)\,\omega(\sigma) = \mathrm{I}_n$ et la matrice $\omega(\sigma)$ est orthogonale.

$$\boxed{\omega(\mathrm{B}_n) \subset \mathrm{O}_n(\mathbb{R})}$$

> Avec les notations de la remarque précédente, f_σ transforme la base canonique, qui est orthonormale, en une autre base orthonormale, puisqu'il ne fait que changer l'ordre des vecteurs, donc c'est un endomorphisme orthogonal. Sa matrice dans la base canonique (orthonormale) est aussi orthogonale.

3 Vérifions que pour tout couple d'indices $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$,

$$\Big[\operatorname{diag}\big((d_\ell)_\ell\big)\,\omega(\sigma)\Big]_{i,j} = \Big[\omega(\sigma)\,\operatorname{diag}\big((d_{\sigma(\ell)})_\ell\big)\Big]_{i,j}$$

Soit $(i,j) \in [\![\,1\,;n\,]\!]^2$. D'une part

$$\begin{aligned}\Big[\operatorname{diag}\big((d_\ell)_\ell\big)\,\omega(\sigma)\Big]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n}\Big[\operatorname{diag}\big((d_\ell)_\ell\big)\Big]_{i,k}\Big[\omega(\sigma)\Big]_{k,j}\\ &= \Big[\operatorname{diag}\big((d_\ell)_\ell\big)\Big]_{i,i}\Big[\omega(\sigma)\Big]_{i,j} \quad \Big(\text{car } \Big[\operatorname{diag}\big((d_\ell)_\ell\big)\Big]_{i,k} = 0 \text{ si } k \neq i\Big)\\ \Big[\operatorname{diag}\big((d_\ell)_\ell\big)\omega(\sigma)\Big]_{i,j} &= d_i\,\delta_{i,\sigma(j)}\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\Big[\omega(\sigma)\operatorname{diag}\big((d_{\sigma(\ell)})_\ell\big)\Big]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n}\Big[\omega(\sigma)\Big]_{i,k}\Big[\operatorname{diag}\big((d_{\sigma(\ell)})_\ell\big)\Big]_{k,j}\\ &= \Big[\omega(\sigma)\Big]_{i,j}\Big[\operatorname{diag}\big((d_{\sigma(\ell)})_\ell\big)\Big]_{j,j}\\ \Big[\omega(\sigma)\operatorname{diag}\big((d_{\sigma(\ell)})_\ell\big)\Big]_{i,j} &= \delta_{i,\sigma(j)}\,d_{\sigma(j)}\end{aligned}$$

Si $i \neq \sigma(j)$, alors $\delta_{i,\sigma(j)} = 0$ et $d_i\delta_{i,\sigma(j)} = 0 = \delta_{i,\sigma(j)}\,d_{\sigma(j)}$. Sinon $\delta_{i,\sigma(j)} = 1$ et

$$d_i = d_{\sigma(j)} \quad \text{puis} \quad d_i\delta_{i,\sigma(j)} = \delta_{i,\sigma(j)}d_{\sigma(j)}$$

Dans tous les cas $\Big[\operatorname{diag}\big((d_\ell)_\ell\big)\omega(\sigma)\Big]_{i,j} = \Big[\omega(\sigma)\operatorname{diag}\big((d_{\sigma(\ell)})_\ell\big)\Big]_{i,j}$

d'où $$\boxed{\operatorname{diag}\big((d_\ell)_\ell\big)\omega(\sigma) = \omega(\sigma)\operatorname{diag}\big((d_{\sigma(\ell)})_\ell\big)}$$

4 Raisonnons par double implication. Soient $\mathrm{D} = \operatorname{diag}\big((d_i)_i\big)$ et $\mathrm{D}' = \operatorname{diag}\big((d_i{}')_i\big)$.

- <u>*i)* ⇒ *ii)*</u> : Supposons que les matrices diagonales D et D′ aient les mêmes coefficients diagonaux avec les mêmes occurrences. Dans ce cas, il existe une permutation $\sigma \in \mathrm{B}_n$ telle que

$$\forall\, i \in [\![\,1\,;n\,]\!] \qquad d_i{}' = d_{\sigma(i)}$$

> Par exemple, pour
>
> $$\mathrm{D} = \begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&5&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{D}' = \begin{pmatrix}5&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$
>
> On peut considérer les permutations
>
> $$\sigma\left\{\begin{array}{ccc}1&\mapsto&2\\2&\mapsto&1\\3&\mapsto&3\\4&\mapsto&4\end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \sigma\left\{\begin{array}{ccc}1&\mapsto&4\\2&\mapsto&1\\3&\mapsto&3\\4&\mapsto&2\end{array}\right.$$
>
> Cet exemple montre qu'il n'y a pas unicité de la permutation dès qu'il y a plusieurs occurrences d'un même coefficient.

D'après la question 3,

$$\operatorname{diag}\big((d_\ell)_\ell\big)\omega(\sigma) = \omega(\sigma)\operatorname{diag}\big((d_{\sigma(\ell)})_\ell\big) = \omega(\sigma)\operatorname{diag}\big((d_\ell{}')_\ell\big)$$

d'où $\mathrm{DM} = \mathrm{MD}'$ en posant $\mathrm{M} = \omega(\sigma)$. Comme M est une matrice orthogonale, M est inversible avec $\mathrm{M}^{-1} = {}^t\mathrm{M}$. Par multiplication à gauche par l'inverse de M, on a ${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{DM} = \mathrm{D}'$. L'énoncé *ii)* est vérifié.