Mines Maths 1 MP 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Antoine Barrier (ENS Paris-Saclay) ; il a été relu par Guillaume Duboc (ENS Lyon) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

La limite d'une suite est introduite et étudiée en classes préparatoires principalement dans le cadre des espaces vectoriels normés. Dans un autre contexte, les probabilités, il est également possible de définir la notion de limite d'une suite de variables aléatoires. C'est cette nouvelle notion qu'aborde le sujet : il porte sur une démonstration du théorème de De Moivre-Laplace, qui décrit le comportement limite d'une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires suivant des lois binomiales ($\mathrm{X}_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n\,;p)$). Il s'agit d'un cas particulier du théorème central limite, un résultat fondamental de la théorie des probabilités.

- Dans la partie I, on établit divers résultats préliminaires, les outils principaux étant des analyses asymptotiques.
- La partie II s'intéresse au comportement asymptotique du maximum p_n de l'ensemble $\{\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) \,|\, k \in [\![\, 0\,; n\,]\!]\}$. On montre que la suite $(\sqrt{n\,p\,(1-p)}\,p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, ce qui sera utile dans la partie suivante. Pour cela, on s'appuie majoritairement sur les résultats préliminaires et sur la caractérisation de la loi binomiale.
- La partie III démontre le théorème de De Moivre-Laplace. C'est la partie la plus longue et la plus importante du sujet. Les lois binomiales sont renormalisées en variables $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On montre que $(\mathrm{P}(a \leqslant \mathrm{Y}_n \leqslant b))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l'intégrale d'une certaine fonction sur le segment $[\,a\,; b\,]$. Les variables aléatoires $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant discrètes, et le terme limite s'exprimant comme une intégrale, on a besoin d'introduire des fonctions auxiliaires permettant de faire le lien entre discret et continu. Le théorème de convergence dominée sera le point crucial de la démonstration.
- Après cela, la quatrième partie s'intéresse à deux applications : une démonstration de la valeur de l'intégrale de Gauss puis une extension du résultat de la partie III au cas où a ou b est infini. Cette extension, qui pourrait sembler immédiate, nécessite une rédaction précise.
- Enfin, la dernière partie porte sur une généralisation du résultat obtenu. On regarde des variables aléatoires $(\mathrm{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies en fonction de $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on démontre, sous certaines hypothèses, une convergence du même type que celle obtenue pour $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On utilise des résultats d'intégration, notamment le théorème de changement de variable.

Le problème fait appel à une grande partie du programme d'analyse de MP, notamment les chapitres de probabilités discrètes et d'intégration. La maîtrise des comparaisons asymptotiques de suites, vues en première année, est indispensable pour traiter correctement ce sujet. L'énoncé est très progressif, avec une première partie sans difficulté notable, une deuxième de niveau moyen (hormis la difficile question 5) puis une troisième partie plus ambitieuse qui, après quelques questions techniques, reprend les raisonnements mis en place dans la seconde partie de manière plus poussée.

Indications

Partie I

2 Encadrer $\lfloor \lambda x + \mu \rfloor$ et $\lceil \lambda x + \mu \rceil$ par $\lambda x + \mu - 1$ et $\lambda x + \mu + 1$.

4 Faire un développement limité de $\ln(1 + x)$ à l'ordre 2.

Partie II

5 Montrer que $k \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k)$ est croissante sur $[\![\, 0\,;x_n \,]\!]$ et décroissante sur $[\![\, x_n\,;n \,]\!]$ en comparant le rapport $\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k+1)/\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k)$ avec 1.

6 Utiliser le résultat de la question 2 puis appliquer la formule de Stirling à $n\,!$, $x_n\,!$ et $(n - x_n)\,!$

8 Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n - n\,p)/n = 0$ et appliquer la question 4.

Partie III

9 Utiliser la relation entre X_n et Y_n ainsi que les propriétés de l'espérance et de la variance.

11 Commencer par montrer que $k_n = k$ sur $[\, \tau_{n,k}\,; \tau_{n,k+1}\, [$.

12 Pour le premier résultat, considérer une primitive de Φ. Pour le second, remarquer que f_n est une fonction en escalier constante sur $[\, \tau_{n,k}\,; \tau_{n,k+1}\, [$.

14 Montrer de façon similaire à la question 2, que $k_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,p$.

16 Procéder comme à la question 8.

17 Réunir les résultats des questions 13, 14 et 16, en se rappelant que

$$f_n(t) = f_n(\tau_{n,k_n(t)})$$

Pour le second résultat, on appliquera le théorème de convergence dominée en se ramenant, pour l'hypothèse de domination, à l'étude de p_n faite en Partie II.

18 Pour la première convergence, montrer que

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 0$$

Ensuite, comparer les événements $(e_n(a) \leqslant \mathrm{Y}_n \leqslant e_n(b))$ et $(a \leqslant \mathrm{Y}_n \leqslant b)$.

Partie IV

19 Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à l'évènement $(|\mathrm{Y}_n| \geqslant \mathrm{T})$.

20 Commencer par montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n \leqslant b) \geqslant \int_{-\infty}^b \Phi(t)\,\mathrm{d}t - \varepsilon$$

pour n suffisamment grand.

Partie V

21 Pour l'existence, utiliser le théorème de changement de variable.

Résultats préliminaires

1 La formule de Stirling établit que

$$\boxed{n\,! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$$

Autrement dit,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\,!}{\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n} = 1$$

Posons ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_n = \dfrac{n\,!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n} - 1$, de sorte que

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La suite } (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers 0 et est telle que} \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad n\,! = \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n (1+\varepsilon_n)\end{array}}$$

> L'équivalence donnée par la formule de Stirling pouvait aussi se réécrire
> $$n\,! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\right)$$
> ou encore
> $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad n\,! = \alpha_n\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$
> pour une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeant vers 1. Dans les deux cas on s'en sortait également en utilisant la définition d'un petit o ou en posant $\varepsilon_n = \alpha_n - 1$.

2 Rappelons que, par définition des parties entières supérieure et inférieure :

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad y - 1 < \lfloor y \rfloor \leqslant y \qquad \text{et} \qquad y \leqslant \lceil y \rceil < y + 1$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\lambda x + \mu - 1 \leqslant \lfloor \lambda x + \mu \rfloor \leqslant \lceil \lambda x + \mu \rceil \leqslant \lambda x + \mu + 1$$

d'où
$$1 + \frac{\mu - 1}{\lambda x} \leqslant \frac{\lfloor \lambda x + \mu \rfloor}{\lambda x} \leqslant \frac{\lceil \lambda x + \mu \rceil}{\lambda x} \leqslant 1 + \frac{\mu + 1}{\lambda x} \qquad (\lambda x > 0)$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient par théorème d'encadrement

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor \lambda x + \mu \rfloor}{\lambda x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\lceil \lambda x + \mu \rceil}{\lambda x} = 1$$

Autrement dit,
$$\boxed{\lfloor \lambda x + \mu \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda x \quad \text{et} \quad \lceil \lambda x + \mu \rceil \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda x}$$

> Pour cette question, on ne traite au brouillon qu'un seul calcul. Par contre, au moment de rédiger au propre, remarquer que l'on peut faire les deux preuves simultanément permet de gagner en concision.

3 La fonction Φ est continue et positive sur $\mathbb{R}$. Vérifions son intégrabilité en $+\infty$ et en $-\infty$. Grâce à la parité de Φ, on se restreint à l'étude en $+\infty$. On remarque que

$$t^2\,\Phi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad \text{ou encore} \quad \Phi(t) = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}(t^{-2})$$

En appliquant le critère de Riemann, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{d}t/t^2$ converge donc par comparaison Φ est intégrable en $+\infty$, d'où

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

4 Utilisons le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$$

qui donne
$$\begin{aligned}\zeta(x) &= (x+1)\ln(x+1)\\ &= (x+1)\Big(x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)\Big)\\ &= x^2 + x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)\end{aligned}$$

c'est-à-dire
$$\boxed{\zeta(x) = x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)}$$

Étude asymptotique d'une suite

5 Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Comme X_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$, on sait que

$$\forall k \in [\![\, 0\,; n\,]\!] \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) = \binom{n}{k}\, p^k\, q^{n-k}$$

et notons que, comme $p > 0$ et $q > 0$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) > 0$ pour tout $k \in [\![\, 0\,; n\,]\!]$.

Regardons les variations de $k \longmapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k)$. Soit $k \in [\![\, 0\,; n-1\,]\!]$. Il vient

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k+1)}{\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k)} &= \frac{\dbinom{n}{k+1}\, p^{k+1}\, q^{n-(k+1)}}{\dbinom{n}{k}\, p^k\, q^{n-k}}\\ &= \frac{k\,!\,(n-k)\,!}{(k+1)\,!\,(n-(k+1))\,!}\,\frac{p}{q}\\ \frac{\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k+1)}{\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k)} &= \frac{n-k}{k+1}\,\frac{p}{q}\end{aligned}$$

et on peut alors en déduire que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k+1)}{\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k)} \leqslant 1 &\iff (n-k)p \leqslant q(k+1)\\ &\iff k(p+q) \geqslant n\,p - q\\ &\iff k \geqslant n\,p - q && (p+q=1)\\ &\iff k \geqslant \lceil n\,p - q \rceil && (k \in \mathbb{N})\\ \frac{\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k+1)}{\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k)} \leqslant 1 &\iff k \geqslant x_n\end{aligned}$$

Autrement dit, $k \longmapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k)$ est strictement croissante sur $[\![\, 0\,; x_n\,]\!]$ et décroissante sur $[\![\, x_n\,; n\,]\!]$, donc atteint son maximum en x_n. Ainsi,

$$\boxed{\text{Le réel } p_n \text{ est le plus grand élément de } \{\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) \mid k \in [\![\, 0\,; n\,]\!]\}.}$$