e3a Mathématiques MP 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tristan Poullaouec (professeur en CPGE) ; il a été relu par Sélim Cornet (professeur agrégé) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Ce sujet est constitué de quatre exercices indépendants qui abordent les grands thèmes du programme.

- Au cours du premier exercice, on établit la convergence normale d'une série de fonctions vers la fonction $x \longmapsto x^{-x}$ prolongée par continuité en 0, afin de calculer l'intégrale de cette fonction sur $[\,0\,;1\,]$. On retrouve au passage la fonction Γ d'Euler, dont on détermine l'expression sur $\mathbb{N}^*$.
- On s'intéresse ensuite à l'inverse généralisé d'un endomorphisme symétrique f d'un espace euclidien, que l'on définit à l'aide des projecteurs orthogonaux sur les sous-espaces propres de f. L'étude débouche sur un exemple concret en dimension 4.
- Dans le troisième exercice, on étudie deux variables aléatoires entières qui sont caractérisées par leurs fonctions génératrices. On détermine leurs lois, espérances et variances, ainsi que celles de leur somme.
- Le dernier exercice est consacré à l'étude de formes linéaires définies à l'aide d'intégrales sur l'espace $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Ce sujet ne contient pas de difficulté particulière : les questions sont bien détaillées, les résultats essentiels apparaissent explicitement dans l'énoncé et les quatre exercices restent très proches du cours (on retrouve d'ailleurs quelques grands classiques). Rien ne s'oppose donc à ce qu'un candidat bien préparé le traite dans le temps imparti.

Indications

Exercice 1

1.1 Ces fonctions étant clairement toutes continues sur l'intervalle $]\,0\,;1\,]$, il suffit d'étudier leur continuité (à droite) en 0.

1.2.1 Utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

1.5.1 Se servir de la question 1.3 pour calculer $\|f_n\|_\infty$.

1.6.1 Étudier l'intégrabilité sur $]\,0\,;1\,]$ et sur $[\,1\,;+\infty\,[$ en comparant à des intégrales de Riemann.

1.7 Pour $a \in\,]\,0\,;1\,]$, calculer $\displaystyle\int_a^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable proposé, puis faire tendre a vers 0.

1.8 Utiliser les résultats des questions 1.5 et 1.7.

1.9 On pourra majorer le reste de la série à l'aide du reste d'une série géométrique.

Exercice 2

2.1.2 Se servir de la diagonalisabilité de f pour le second point.

2.1.5 Expliciter les sous-espaces $\mathrm{Im}\,(p_j)$ et $\mathrm{Ker}\,(p_i)$.

2.1.6 Pour $x \in \mathrm{E}$, calculer $f(x)$ à l'aide du résultat de la question 2.1.4.

2.1.7 Utiliser les questions 2.1.3 et 2.1.4.

2.2.1 Se servir des résultats des questions 2.1.6, 2.1.5 et 2.1.7.

2.3.2 On peut trouver des vecteurs propres de la matrice A à la main, en effectuant des combinaisons simples des colonnes.

2.3.4 Utiliser le résultat de la question 2.1.6.

2.3.5 Se servir de la question 2.3.3.

2.3.7 Penser au résultat précédent et à l'expression matricielle du produit scalaire.

2.4 On commencera par déterminer M_1 à l'aide de la question 2.3.4.

Exercice 3

3.1 On pourra exprimer $\mathrm{G_X}$ à l'aide de la fonction $f : t \longmapsto 1/(1-t)$.

3.4 Se servir de la définition des fonctions génératrices.

3.5 Utiliser l'indépendance de X et Y, ainsi que les résultats de la question 3.4.

3.6.3 Faire le lien avec les dérivées successives de $\mathrm{G_Y}$ en 1.

Exercice 4

4.3.2 Déterminer l'image par ψ de la base canonique $\mathscr{B}_0 = (1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$.

4.3.3 On pourra montrer que les deux propriétés sont équivalentes à $\psi(\mathrm{P})(1) = 0$.

4.3.4 Trouver des antécédents par ψ des polynômes qui apparaissent à la question 4.3.3, et utiliser les résultats des questions 4.3.3 et 4.2.2.

4.4.2 Utiliser la formule de Taylor en 0 pour exprimer tout polynôme à l'aide des ψ_k.

4.4.3 Se servir des calculs effectués à la question précédente.

Exercice 1

1.1 La fonction f_0 étant constante, elle est évidemment continue sur I. Pour les autres, on va d'abord justifier qu'elles sont continues sur l'intervalle $]\,0\,;1\,]$ avant d'étudier leur continuité (à droite) en 0.

- La fonction f a pour expression sur $]\,0\,;1\,]$

  $$f(x) = x^{-x} = \exp\left(-x \ln x\right)$$

  si bien qu'elle est continue sur cet intervalle en tant que composée de fonctions usuelles continues sur leurs ensembles de définition. Étudions sa continuité en 0 : on sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = 0$ d'après les croissances comparées, et par conséquent

  $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \exp(0) = 1 = f(0)$$

  par continuité de l'exponentielle. La fonction f est bien continue en 0, donc

  $$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur I.}}$$

- Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. Comme f, la fonction f_n est composée de fonctions usuelles continues, donc elle est continue sur $]\,0\,;1\,]$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = 0$ d'où par produit de limites

  $$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = 0 = f_n(0)$$

  ce qui prouve que f_n est continue en 0. De ce fait,

  $$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la fonction } f_n \text{ est continue sur I.}}$$

> La continuité de ces fonctions va permettre de définir leurs intégrales sur l'intervalle $[\,0\,;1\,]$ en fin d'exercice.

1.2 Puisque $f_n(0) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$, la série numérique $\sum f_n(0)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0) = f_0(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(0) = 1 = f(0)$$

Soit $x \in\,]\,0\,;1\,]$. La fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, y \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^{\,y} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}$$

En particulier, on obtient pour $y = -x \ln x$

$$\mathrm{e}^{\,-x\ln x} = f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x \ln x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}(x \ln x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

Ceci prouve que

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \textstyle\sum f_n \text{ converge simplement sur I vers la fonction } f.}$$

> On ne peut pas dire que ce soit une grosse surprise, étant donnée la façon dont sont introduites les fonctions f et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.3 Puisque la fonction φ est continue sur I, on a nécessairement

$$\varphi(0) = \lim_{t \to 0^+} \varphi(t) = \lim_{t \to 0^+} t \ln t = 0$$

> Il est quand même étonnant que cette valeur n'apparaisse pas dans l'énoncé.

En outre, φ est dérivable sur $]\,0\,;1\,]$ en tant que produit de fonctions dérivables et

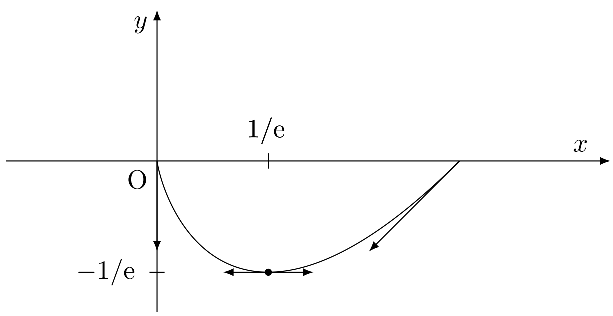
$$\forall t \in \,]\,0\,;1\,] \qquad \varphi'(t) = 1 \times \ln t + t \times \frac{1}{t} = \ln t + 1$$

Ainsi, $\quad \forall t \in \,]\,0\,;1\,] \qquad \varphi'(t) > 0 \iff \ln t > -1 \iff t > 1/\mathrm{e}$

par croissance de ln, ce qui permet de dresser le tableau de variations de φ sur I :

t	0		$1/\mathrm{e}$		1
$\varphi'(t)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$\varphi(t)$	0	$\searrow$	$-1/\mathrm{e}$	$\nearrow$	0

1.4 Notons tout d'abord que $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi'(t) = -\infty$, ce qui montre que la courbe de φ admet l'axe des ordonnées pour tangente au point d'abscisse 0. Par ailleurs, $\varphi'(1) = 1$ donc la tangente au point d'abscisse 1 a pour pente 1, et ainsi pour équation $y = x-1$. Voici alors la courbe demandée :



1.5 On a $\|\varphi\|_\infty = 1/\mathrm{e}$ d'après la question 1.3. Par définition, on a $f_n = (-1)^n \varphi^n / n!$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ donc

$$\|f_n\|_\infty = \frac{(1/\mathrm{e}\,)^n}{n!} = \frac{\left(\mathrm{e}^{\,-1}\right)^n}{n!}$$

Or, la série numérique $\sum \left(\mathrm{e}^{\,-1}\right)^n / n!$ converge puisque la fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, si bien que

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum f_n \text{ converge normalement sur I.}}$$

1.6.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour que le nombre $\Gamma(x)$ existe, il faut et il suffit que les intégrales données par $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1} \mathrm{e}^{\,-t}\, \mathrm{d}t$ et $\mathrm{I}_2 = \displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{\,-t}\, \mathrm{d}t$ soient convergentes.

- Notons tout d'abord que I_1 est impropre en 0 et que l'on a $t^{x-1}\mathrm{e}^{\,-t} \underset{t \to 0}{\sim} t^{x-1}$. D'après le critère de Riemann, $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\, \mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $1-x < 1$, ce qui est équivalent à $x > 0$. On en déduit, par comparaison de fonctions positives, que l'intégrale I_1 converge si, et seulement si, $x > 0$.