Centrale Maths 2 MP 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sélim Cornet (professeur agrégé). Il a été relu par Bertrand Wiel (professeur en CPGE) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Ce sujet est constitué de deux problèmes indépendants ayant pour thème commun la démonstration d'inégalités de Bernstein. Il s'agit d'inégalités permettant de contrôler les valeurs maximales de la dérivée d'une fonction par les valeurs maximales de cette même fonction.

- Le premier problème est plutôt original. Il propose la démonstration de telles inégalités pour des fonctions polynomiales et des fonctions polynômes trigonométriques. Après quelques questions préliminaires sur la famille des polynômes de Tchebychev, on démontre une première inégalité de Bernstein pour les fonctions polynômes trigonométriques : si f est une combinaison linéaire des fonctions de la famille $(\cos(k\cdot), \sin(k\cdot))_{0\leqslant k\leqslant n}$, alors

$$\operatorname*{Sup}_{\mathbb{R}} |f'| \leqslant n \operatorname*{Sup}_{\mathbb{R}} |f|$$

  On en déduit une seconde inégalité pour les fonctions polynomiales :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}] \qquad \operatorname*{Sup}_{x\in[\,-1\,;\,1\,]} |\mathrm{P}'(x)| \leqslant n^2 \operatorname*{Sup}_{x\in[\,-1\,;\,1\,]} |\mathrm{P}(x)|$$

- Le second problème est plus classique. Il se place dans le cadre des fonctions intégrables. Deux célèbres outils d'analyse dans des espaces de fonctions intégrables sont tout d'abord introduits : la transformation de Fourier et le produit de convolution définis pour f intégrable et g bornée sur $\mathbb{R}$ par

$$\widehat{f} : x \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x\xi}\,\mathrm{d}\xi \qquad \text{et} \qquad f * g : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

  La troisième partie est consacrée à la construction d'une fonction auxiliaire. Enfin, la quatrième partie conduit à la démonstration de l'inégalité proprement dite : il existe $\mathrm{C} > 0$ telle que pour toute fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ et dont la transformée de Fourier est nulle en dehors de $[\,-\lambda\,;\,\lambda\,]$ on a

$$\operatorname*{Sup}_{\mathbb{R}} |f'| \leqslant \mathrm{C}\,\lambda \operatorname*{Sup}_{\mathbb{R}} |f|$$

Si les thèmes du programme abordés dans ce sujet sont relativement peu nombreux, celui-ci constitue néanmoins un bon sujet d'entraînement, notamment pour qui souhaite pratiquer la trigonométrie ou le raisonnement par récurrence. Les deux problèmes suivent une progression typique d'un sujet de la banque d'épreuves Centrale-Supélec : chacun commence par des questions classiques et proches du cours, puis la difficulté et la technicité des questions augmentent progressivement. Le sujet reste néanmoins abordable.

Indications

1 Conjecturer le degré sur les premiers termes de la suite $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis démontrer la conjecture par récurrence.

2 Procéder par récurrence. C'est également le moment de se souvenir des formules de trigonométrie !

3 Décomposer P dans la base formée par les $(\mathrm{T}_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

4 Tout réel de l'intervalle $[-1\,;1\,]$ peut s'écrire $\cos(\theta)$ pour un certain réel θ.

5 Procéder par récurrence pour démontrer l'inégalité donnée en indication dans l'énoncé. Utiliser cette inégalité pour majorer la norme de ${\mathrm{T}_n}'$. Montrer enfin l'égalité en calculant un développement limité de ${\mathrm{T}_n}'(\cos(\theta))$ lorsque θ tend vers 0.

6 Former la décomposition en éléments simples de B/A.

8 Reconnaître un taux d'accroissement dans la définition de Q_λ.

9 Vérifier que les ω_k sont des racines distinctes de R.

10 Appliquer la formule (I.1) avec les polynômes R et Q_λ pour obtenir la première relation. Évaluer ensuite en 1 pour en déduire la seconde relation.

11 Appliquer deux fois l'inégalité (I.2) : une première fois au polynôme X^{2n}, puis réinjecter le résultat obtenu dans la formule (I.2) appliquée au polynôme P.

12 Décomposer f comme somme de fonctions trigonométriques, puis appliquer les formules d'Euler.

13 Penser d'abord à la technique de l'angle moitié. Appliquer ensuite la relation démontrée à la question 11 avec $\lambda = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}$.

14 Recourir une nouvelle fois à la question 11, appliquée au polynôme $\mathrm{P} = 1$.

15 Procéder au changement de variable $x = \cos(\theta)$.

16 Faire appel au résultat de la question 3 et à des formules de trigonométrie pour montrer que $f \in \mathcal{S}_n$. Remarquer ensuite que $\mathrm{Q}(1) = f'(0)$.

17 Traiter séparément les cas $t = 0$ et $t \neq 0$. Dans ce dernier cas, un changement de variable pourra être utile.

18 Rassembler les résultats des questions 15 et 17.

19 Penser aux polynômes de Tchebychev.

20 Vérifier les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètre.

21 Penser au critère de continuité pour les applications linéaires entre espaces normés.

22 Procéder à un changement de variable.

23 Effectuer là encore un changement de variable.

25 Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

27 Démontrer par récurrence le résultat donné en indication. Faire appel au théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ pour prouver l'hérédité.

29 Étudier les variations de θ.

30 Commencer par construire une fonction $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ qui vérifie les inclusions $\alpha([\,-1\,;1\,]) \subset\,]-\infty\,;-1\,]$ et $\alpha(\mathbb{R}\setminus[\,-2\,;2\,]) \subset [\,1\,;+\infty\,[$.

32 Procéder à une double intégration par parties.

33 Prouver que $\widehat{f} = \widehat{\lambda f * r_\lambda}$.

34 Exprimer f' à l'aide des questions 25 et 33, et exploiter la question 24.

I. Inégalité polynomiale de Bernstein et applications

1 Remarquons que $\deg(\mathrm{T}_0) = 0$, $\deg(\mathrm{T}_1) = 1$ et $\deg(\mathrm{T}_2) = \deg(2\mathrm{X}^2 - 1) = 2$. On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme T_n est de degré n. Montrons donc par une récurrence à deux pas que la propriété

$$\mathscr{P}(n): \quad \deg(\mathrm{T}_n) = n$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie puisque $\deg(\mathrm{T}_0) = \deg(1) = 0$.
- $\underline{\mathscr{P}(1)}$ est vraie puisque $\deg(\mathrm{T}_1) = \deg(\mathrm{X}) = 1$.
- $\underline{[\mathscr{P}(n) \wedge \mathscr{P}(n+1)] \Longrightarrow \mathscr{P}(n+2)}$: soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies. Montrons que $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie. Pour cela, remarquons d'abord que $\mathrm{T}_{n+2} = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n$. Or, par hypothèse de récurrence,

$$\deg(2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1}) = \deg(2\mathrm{X}) + \deg(\mathrm{T}_{n+1}) = 1 + n + 1 = n + 2$$

  et $\deg(\mathrm{T}_n) = n$. Comme $2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1}$ et T_n sont de degrés différents, il s'ensuit que

$$\deg(\mathrm{T}_{n+2}) = \max\left(\deg(2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1}), \deg(\mathrm{T}_n)\right) = \max\left(n+2, n\right) = n + 2$$

  Cela prouve que $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
- $\underline{\text{Conclusion}}$: par récurrence, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \deg(\mathrm{T}_n) = n.}$$

La famille de polynômes $(\mathrm{T}_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est échelonnée en degré, elle est par conséquent libre. Or, son cardinal est égal à $n+1$, soit à la dimension de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$, d'où

$$\boxed{\text{La famille } (\mathrm{T}_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \text{ forme une base de } \mathbb{C}_n[\mathrm{X}].}$$

2 Montrons à nouveau par une récurrence à deux pas que la propriété

$$\mathscr{P}(n): \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{T}_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie puisque pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{T}_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0\theta)$.
- $\underline{\mathscr{P}(1)}$ est vraie puisque pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{T}_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$.
- $\underline{[\mathscr{P}(n) \wedge \mathscr{P}(n+1)] \Longrightarrow \mathscr{P}(n+2)}$: soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies. Montrons que $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculons, en utilisant la relation de récurrence sur les $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'hypothèse de récurrence,

$$\mathrm{T}_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\mathrm{T}_{n+1}(\cos(\theta)) - \mathrm{T}_n(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)$$

  Or $\quad \cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta + \theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)$

  On en déduit

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)\left(\cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)\right) - \cos(n\theta) \\ &= \cos(n\theta)(2\cos(\theta)^2 - 1) - 2\sin(n\theta)\cos(\theta)\sin(\theta) \end{aligned}$$

  puis, grâce aux formules de duplication et d'addition,

$$\mathrm{T}_{n+2}(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)\cos(2\theta) - \sin(n\theta)\sin(2\theta) = \cos(n\theta + 2\theta) = \cos((n+2)\theta)$$

  ce qui prouve que $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et finalement

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } \theta \in \mathbb{R},\ \mathrm{T}_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$. Comme $(\mathrm{T}_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ forme une base de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$, il existe des nombres complexes $a_0, \ldots, a_n$ tels que

$$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{T}_k$$

Il découle alors du résultat de la question 2 que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{P}(\cos(\theta)) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{T}_k(\cos(\theta)) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\theta)$$

Ainsi, $\boxed{\text{La fonction } \theta \mapsto \mathrm{P}(\cos(\theta)) \text{ est dans } \mathcal{S}_n.}$

> Les fonctions de $\mathcal{S}_n$ sont appelées des polynômes trigonométriques. Elles constituent notamment la base de la théorie des séries de Fourier, qui consiste à approcher une fonction périodique et régulière par une suite de polynômes trigonométriques.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [\,-1\,;1\,]$. Soit $\theta = \operatorname{Arccos}(x)$, ainsi $x = \cos(\theta)$. Il s'ensuit

$$|\mathrm{T}_n(x)| = |\mathrm{T}_n(\cos(\theta))| = |\cos(n\theta)| \leqslant 1$$

ce qui prouve $\|\mathrm{T}_n\|_{\mathrm{L}^\infty([\,-1\,;1\,])} \leqslant 1$. En outre, remarquons que

$$|\mathrm{T}_n(1)| = |\mathrm{T}_n(\cos(0))| = |\cos(n \times 0)| = |\cos(0)| = 1$$

Cela permet de conclure que $\boxed{\|\mathrm{T}_n\|_{\mathrm{L}^\infty([\,-1\,;1\,])} = 1}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Suivons l'indication de l'énoncé et commençons par prouver, par récurrence, que la propriété

$$\mathscr{P}(n):\qquad \forall \theta \in \mathbb{R} \qquad |\sin(n\theta)| \leqslant n|\sin(\theta)|$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- <u>$\mathscr{P}(0)$</u> est vraie : en effet, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$|\sin(0 \times \theta)| = |\sin(0)| = 0 \leqslant 0|\sin(\theta)|$$

- <u>$\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$</u> : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$. Pour cela, considérons un réel θ quelconque et calculons

$$|\sin((n+1)\theta)| = |\sin(n\theta)\cos(\theta) + \cos(n\theta)\sin(\theta)|$$

Appliquons l'inégalité triangulaire :

$$|\sin((n+1)\theta)| \leqslant |\sin(n\theta)|\,|\cos(\theta)| + |\cos(n\theta)|\,|\sin(\theta)|$$

Les majorations $|\cos(\theta)| \leqslant 1$, $|\cos(n\theta)| \leqslant 1$ et l'hypothèse de récurrence entraînent alors

$$|\sin((n+1)\theta)| \leqslant n|\sin(\theta)| + |\sin(\theta)| = (n+1)|\sin(\theta)|$$

- <u>Conclusion</u> : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$|\sin(n\theta)| \leqslant n|\sin(\theta)|$$