CCINP Maths 1 MP 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Bertrand Wiel (professeur en CPGE) ; il a été relu par Rémi Pellerin (ENS Lyon) et Céline Chevalier (enseignant-chercheur à l'université).

L'épreuve est constituée de deux exercices d'analyse, proches dans la forme de ceux de la banque d'épreuves orales du concours, et d'un problème en trois parties autour de la fonction zêta de Riemann faisant intervenir des questions d'informatique, d'analyse, d'arithmétique et de probabilités.

- Le premier exercice s'intéresse au calcul d'une intégrale dont on montre qu'elle est égale à la somme d'une série. Il ne contient que deux questions mais fait appel à de nombreux résultats du cours sur les intégrales généralisées. Pour réussir cet exercice, il fallait bien maîtriser la méthode d'inversion série-intégrale et appliquer rigoureusement le théorème d'intégration terme à terme.
- Le second exercice, moins technique, demande d'établir par un argument classique de concavité l'inégalité arithmético-géométrique pour 3 réels strictement positifs afin d'établir ensuite qu'une certaine fonction à deux variables réelles admet un extremum local sur un ouvert. On recherche d'abord les éventuels points critiques de la fonction pour déterminer où l'extremum pourrait être atteint.
- La première partie du problème porte sur le programme de tronc commun d'informatique, elle est indépendante des suivantes. L'objectif est d'écrire une fonction itérative calculant les nombres de Bernoulli, après avoir écrit des fonctions auxiliaires pour calculer la factorielle et des coefficients binomiaux, cette dernière sous forme récursive. Les questions d'efficacité associées à l'utilisation de fonctions récursives ne sont pas soulevées. Seule la capacité à écrire une fonction simple en Python est évaluée. La dernière fonction demande de mettre en œuvre le principe de mémoïsation.
- Dans la deuxième partie, on établit quelques propriétés de la fonction zêta à l'aide du cours sur les séries de fonctions et les familles sommables. Comme le premier exercice, elle exigeait de maîtriser les résultats du cours d'analyse de seconde année et les exercices classiques associés.
- La dernière partie démontre la formule du produit eulérien liant la fonction zêta à l'ensemble des nombres premiers, en utilisant le formalisme du cours de probabilités. Elle exploite des résultats de première année en arithmétique et utilise la notion de famille d'événements mutuellement indépendants.

Si le sujet comporte un nombre de questions plutôt faible, certaines d'entre elles nécessitent une résolution en plusieurs étapes. L'ensemble est conforme aux sujets récents de la filière MP du concours CCINP, c'est-à-dire d'une longueur raisonnable, proche du cours et de ses applications classiques. C'est un bon sujet d'entraînement pour l'écrit de ce concours mais aussi pour l'épreuve orale des concours Mines-Ponts et Centrale-Supélec.

Indications

Exercice I

1 Intégrer par parties.

2 Appliquer le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions.

Exercice II

4 Montrer que la fonction f admet un minimum global en son unique point critique à l'aide de l'inégalité de la question 3.

Problème

7 Identifier les cas de base et le cas récursif pour écrire la fonction récursive.

8 Calculer les nombres de Bernoulli de b_0 à b_n (de bas en haut) en les stockant dans une liste.

10 Appliquer le théorème de dérivation terme à terme à la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

11 Raisonner par l'absurde et appliquer le théorème de la double limite en 1.

12 Appliquer le théorème de la double limite en $+\infty$.

13 Procéder par comparaison série-intégrale. Pour $x > 1$, calculer la valeur de $\mathrm{I}(x)$ pour établir l'équivalent.

14 Montrer que $\mathrm{A} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_n$ puis justifier que

$$\forall x > 1 \qquad \sum_{(a,b)\in\mathrm{A}_n} \frac{1}{(ab)^x} = \frac{d_n}{n^x}$$

Conclure grâce à la réciproque du théorème de sommation par paquets.

16 Montrer l'implication directe par récurrence en établissant à l'aide du lemme de Gauss que le produit de deux diviseurs de N premiers entre eux est un diviseur de N.

17 Utiliser la question 16 pour montrer que l'intersection des éléments d'une sous-famille de $([\mathrm{X} \in a_k\mathbb{N}^*])_{1\leqslant k\leqslant n}$ est de la forme $[\mathrm{X} \in b_1 b_2 \dots b_r\mathbb{N}^*]$ puis utiliser le résultat de la question 15.

18 Exprimer B_n comme l'intersection d'événements mutuellement indépendants.

19 Appliquer le théorème de continuité décroissante à la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

20 Montrer que la suite $(\ln u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et la série $\sum 1/p_n$ sont de même nature. Utiliser l'équivalent de la question 13 pour établir la contradiction.

Exercice I

1 Notons f_k la fonction $t \mapsto t^{2k} \ln t$, définie sur $]\,0\,;1\,]$. La fonction f_k est continue en tant que produit de fonctions continues et $\sqrt{t} f_k(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ par croissances comparées, ainsi

$$f_k(t) \underset{t\to 0^+}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Le critère de comparaison aux intégrales de Riemann établit que la fonction f_k est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$, donc

$$\boxed{\text{L'intégrale } \mathrm{I}_k = \int_0^1 t^{2k} \ln t \, \mathrm{d}t \text{ existe.}}$$

> Ici la fonction de comparaison $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ est intégrable, il n'est ainsi pas nécessaire d'utiliser le critère de comparaison des fonctions positives en écrivant
>
> $$|f_k(t)| \underset{t\to 0^+}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$
>
> qui d'ailleurs est strictement équivalent à l'écriture sans valeurs absolues puisque la définition de la relation de négligeabilité porte sur les valeurs absolues des fonctions. Le critère de comparaison aux intégrales de Riemann correspond à cette situation.

Par croissances comparées, on a la limite $t^{2k+1} \ln t \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$. Intégrons par parties, les fonctions $t \mapsto \ln t$ et $t \mapsto t^{2k+1}/(2k+1)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;1\,]$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_k &= \int_0^1 t^{2k} \ln t \, \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1} \ln t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)t} \, \mathrm{d}t \\
&= 0 - \frac{1}{2k+1} \int_0^1 t^{2k} \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

d'où $$\boxed{\mathrm{I}_k = \frac{-1}{(2k+1)^2}}$$

> On peut appliquer le théorème d'intégration par parties aux intégrales sur un intervalle quelconque lorsque l'existence de deux des limites parmi les trois qu'elle décrit (les deux intégrales, le crochet) a été établie, la troisième limite se déduisant alors du théorème de limite d'une somme. On peut également intégrer par parties sur un segment $[\,\varepsilon\,;1\,]$, où $\varepsilon \in \,]\,0\,;1\,[$, puis justifier le passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$.

2 La fonction f est continue sur $]\,0\,;1\,[$ et

$$\sqrt{t} f(t) = \sqrt{t} \frac{\ln t}{t^2 - 1} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$$

d'où $$f(t) \underset{t\to 0^+}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Par comparaison aux intégrales de Riemann, la fonction f est donc intégrable au voisinage de 0.

Utilisons l'équivalent $\ln t \underset{t\to 1}{\sim} t-1$ pour calculer la limite

$$f(t) = \frac{1}{t+1}\,\frac{\ln t}{t-1} \xrightarrow[t\to 1^-]{} \frac{1}{2}$$

La fonction f est donc prolongeable par continuité en 1, puis intégrable au voisinage de 1. On en déduit que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est intégrable sur }]\,0\,;1\,[.}$$

Appliquons le résultat du cours sur le développement en série entière sur $]-1\,;1\,[$ de la fonction $u \mapsto 1/(1-u)$. On a

$$\forall t \in\,]\,0\,;1\,[\qquad f(t) = -\frac{\ln t}{1-t^2} = -\ln t \sum_{k=0}^{+\infty} (t^2)^k = -\sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k}\ln t = -\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

- D'après la question 1, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues intégrables sur $]\,0\,;1\,[$.
- La série $\sum f_k$ converge simplement vers la fonction $(-f)$ continue sur $]\,0\,;1\,[$.
- Pour tout $k\in\mathbb{N}$, la fonction $|f_k| = -f_k$ est intégrable sur $]\,0\,;1\,[$ d'après la question 1. De plus,

  $$\int_0^1 |f_k(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(2k+1)^2}$$

  d'où, par comparaison avec une série de Riemann, la série $\sum \int_0^1 |f_k(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

On en déduit, par application du théorème d'intégration terme à terme :

$$\int_0^1 (-f)(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 f_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{I}_k = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{-1}{(2k+1)^2}$$

Soit $p\in\mathbb{N}$, séparons les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs, on a :

$$\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{n=1}^{2p+1}\frac{1}{n^2} - \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(2k)^2}$$

Les séries étant convergentes, passons à la limite en utilisant la valeur rappelée dans l'énoncé,

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6}$$

d'où, $\boxed{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}}$

> L'énoncé de la question demande de justifier que f est intégrable puis de démontrer l'expression de l'intégrale comme somme d'une série. La réponse qui est proposée respecte cet ordre, en établissant dans un premier temps l'intégrabilité puis en calculant l'intégrale. Ce n'était pas nécessaire. En effet, le théorème d'intégration terme à terme ne s'appuie pas sur le fait que la fonction f soit intégrable, au contraire il en fournit une preuve. On aurait donc pu directement appliquer le théorème, les réponses attendues en étant, toutes deux, les conséquences.