Mines Maths 2 PSI 2020 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Céline Chevalier (enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Matthias Moreno Ray (professeur en CPGE) et Benoit Chevalier (ENS Ulm).

Tout au long de ce problème, une matrice réelle A est dite *normale* si elle commute avec sa transposée, c'est-à-dire si $\mathrm{A}\,{}^t\!\mathrm{A} = {}^t\!\mathrm{A}\,\mathrm{A}$. L'objectif du sujet est la caractérisation de ces matrices et l'étude de leur exponentielle.

- On prouve tout d'abord dans une partie préliminaire que la relation notée **ORTS** est une relation d'équivalence : par définition, une matrice (réelle) A est dite orthogonalement semblable (**ORTS**) à une autre matrice réelle B s'il existe une matrice Q orthogonale vérifiant $\mathrm{B} = {}^t\mathrm{Q}\,\mathrm{A}\mathrm{Q}$.
- Dans les parties II à V, on établit l'équivalence entre les quatre conditions suivantes, pour une matrice réelle A :
  - ($\mathbf{C_1}$) Il existe un polynôme P à coefficients réels tel que ${}^t\!\mathrm{A} = \mathrm{P}(\mathrm{A})$.
  - ($\mathbf{C_2}$) La matrice A est normale.
  - ($\mathbf{C_3}$) Pour tout vecteur X réel, $\|{}^t\!\mathrm{A}\,\mathrm{X}\| = \|\mathrm{A}\mathrm{X}\|$.
  - ($\mathbf{C_4}$) La matrice A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est soit de taille 1, soit de taille 2 et de la forme $r\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$ avec $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

  La partie II permet d'abord de se familiariser avec les quatre conditions citées ci-dessus sur des exemples simples. La partie III établit ensuite les implications ($\mathbf{C_1}$) $\Rightarrow$ ($\mathbf{C_2}$) $\Rightarrow$ ($\mathbf{C_3}$) et on prouve dans la partie IV que ($\mathbf{C_3}$) $\Rightarrow$ ($\mathbf{C_4}$). Enfin, la partie V conclut cette étude en montrant que ($\mathbf{C_4}$) $\Rightarrow$ ($\mathbf{C_1}$).
- La dernière partie du sujet définit ensuite l'exponentielle d'une matrice A par l'expression

  $$\mathrm{Exp}(\mathrm{A}) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\mathrm{A}^k$$

  dont l'existence est prouvée dans la première question. La suite de la partie est consacrée à démontrer que l'image des matrices normales par l'application exponentielle est l'ensemble des matrices réelles B vérifiant deux conditions :

  1. les valeurs propres négatives de B sont de multiplicité paire ;
  2. il existe une matrice symétrique S à valeurs propres strictement positives et une matrice orthogonale T de déterminant 1 telles que $\mathrm{B} = \mathrm{S}\mathrm{T} = \mathrm{T}\mathrm{S}$.

Les parties de ce problème sont de difficultés inégales : si les deux premières sont très faciles, les parties IV et VI proposent des questions plus longues et techniques qui, sans être très difficiles, demandent d'avoir bien assimilé les résultats et notations des questions précédentes. Ce sujet fait appel à quelques notions d'algèbre euclidienne, de diagonalisation, de topologie et de séries numériques, mais il donne surtout l'occasion de voir si l'on est à l'aise avec les manipulations de matrices, en particulier quand elles sont écrites par blocs.

Indications

Partie I

1 Montrer que la relation est réflexive, transitive et symétrique.

Partie II

2 Pour $(\mathbf{C_4})$, utiliser le théorème spectral.

3 Écrire les normes intervenant dans $(\mathbf{C_3})$ en termes de produits scalaires.

4 Pour $(\mathbf{C_1})$, calculer le polynôme caractéristique de $r\mathrm{T}$ et appliquer le théorème de Cayley-Hamilton.

Partie III

6 Les calculs sont similaires à ceux de la question 3.

Partie IV

7 Exploiter l'égalité des normes avec les vecteurs suggérés par l'énoncé.

8 Traduire les égalités de normes en égalités de produits scalaires.

9 Considérer une valeur propre pour A et un vecteur propre associé, et montrer à l'aide de la question précédente qu'ils sont aussi propres pour ${}^t\mathrm{A}$. Calculer ensuite, pour X_1 et X_2 deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres λ_1 et λ_2 distinctes, la valeur ${}^t\mathrm{X}_1\,\mathrm{AX}_2$ de deux façons différentes, faisant intervenir le produit scalaire entre X_1 et X_2.

10 Montrer que la matrice est diagonalisable si, et seulement si, elle est symétrique.

11 Pour la première partie, exprimer les normes associées en termes de produits scalaires. Considérer ensuite l'endormorphisme canoniquement associé à A et utiliser le théorème 1 admis par l'énoncé pour obtenir les blocs de gauche. Appliquer ensuite la condition $(\mathbf{C_3})$ à des vecteurs bien choisis pour prouver que le bloc en haut à droite est nul, puis que les deux blocs diagonaux vérifient également la condition $(\mathbf{C_3})$.

12 Raisonner par récurrence.

Partie V

13 S'inspirer du théorème d'interpolation de Lagrange. Pour montrer que le polynôme P est réel, montrer que $\overline{\mathrm{P}}$ est également solution du problème et conclure par unicité.

14 Après avoir traité le cas $\sin(\theta) = 0$, supposer que $\sin(\theta) \neq 0$. Calculer le polynôme caractéristique χ de $r\mathrm{R}(\theta)$ et effectuer la division euclidienne de P par χ. Déterminer son reste à l'aide de la relation $\mathrm{P}(r\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}) = r\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\theta}$ puis exploiter le théorème de Cayley-Hamilton.

15 Écrire la condition $(\mathbf{C_4})$, puis appliquer le résultat de la question 13 à l'ensemble des éléments diagonaux de la matrice obtenue et de leurs conjugués. Utiliser alors l'égalité de la question 14 en effectuant les calculs par blocs.

Partie VI

16 Majorer brutalement les termes généraux des séries et calculer la somme de la première série et de i fois la deuxième pour retomber sur une série connue.

17 Expliciter les coefficients du produit AB.

18 La suite converge si, et seulement si, toutes ses composantes (dans la base canonique de $\mathcal{M}_n$) convergent. Majorer alors la norme du terme général des séries obtenues à l'aide de la question précédente. Utiliser enfin le théorème 2 admis par l'énoncé.

19 Montrer que l'application $\mathrm{A} \mapsto {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A} - \mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}$ est continue en considérant ses composantes, puis exploiter le fait que $\mathcal{E}_n$ est l'image réciproque d'un fermé par cette application. Commencer par montrer que si $\mathrm{A} \in \mathcal{E}_n$, alors $\mathrm{S}_p(\mathrm{A}) \in \mathcal{E}_n$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

20 Montrer tout d'abord par récurrence que $(\mathrm{R}(\theta))^k = \mathrm{R}(k\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. Calculer ensuite $\mathrm{S}_p(\mathrm{R}(\theta))$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et appliquer le résultat de la question 18. Pour le sens direct, écrire le fait que A vérifie la condition $(\mathbf{C_4})$ et effectuer les calculs par blocs. Pour le sens réciproque, s'inspirer des calculs tout juste faits pour poser les bonnes valeurs.

21 Pour l'inclusion directe, utiliser la question précédente en séparant les éléments réels de la diagonale dans S et les blocs de taille 2 dans T. Pour l'inclusion réciproque, considérer les endormorphismes canoniquement associés à S et T et les diagonaliser simultanément dans une base orthogonale. Si des valeurs propres négatives apparaissent dans la diagonale, les regrouper deux par deux sous la forme d'une matrice multiple de $\mathrm{R}(\pi)$ afin d'aboutir à la diagonale sous la forme demandée par l'énoncé.

22 Expliciter la matrice donnée dans l'énoncé et calculer son déterminant et ses valeurs propres, en séparant les cas n pair et impair.

I. Question préliminaire

1 Montrons que la relation **ORTS** est réflexive, transitive et symétrique. Pour cela, fixons $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \in (\mathcal{M}_n)^3$.

- On a $\mathrm{I}_n \in \mathcal{O}_n$ et $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{I}_n\,\mathrm{A}\mathrm{I}_n$, donc A est **ORTS** à A. La relation est réflexive.
- Si A est **ORTS** à B et B est **ORTS** à C, alors il existe P et Q dans $\mathcal{O}_n$ telles que

$$\mathrm{B} = {}^t\mathrm{P}\,\mathrm{A}\mathrm{P} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{C} = {}^t\mathrm{Q}\,\mathrm{B}\mathrm{Q}$$

Ainsi, $$\mathrm{C} = {}^t\mathrm{Q}\,{}^t\mathrm{P}\,\mathrm{A}\mathrm{P}\mathrm{Q} = {}^t(\mathrm{P}\mathrm{Q})\,\mathrm{A}\mathrm{P}\mathrm{Q}$$

Or, $\mathrm{PQ} \in \mathcal{O}_n$ car $\mathcal{O}_n$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Par suite, A est **ORTS** à C, puis la relation est transitive.

- Si A est **ORTS** à B, alors il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n$ telle que

$$\mathrm{B} = {}^t\mathrm{P}\,\mathrm{A}\mathrm{P}$$

Il vient $$\mathrm{A} = ({}^t\mathrm{P})^{-1}\mathrm{B}\mathrm{P}^{-1} = {}^t(\mathrm{P}^{-1})\,\mathrm{B}\mathrm{P}^{-1}$$

puisque passage à l'inverse et transposition commutent. Comme $\mathrm{P}^{-1} \in \mathcal{O}_n$ car $\mathcal{O}_n$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, B est **ORTS** à A, puis la relation est symétrique.

$$\boxed{\text{La relation } \textbf{ORTS} \text{ est une relation d'équivalence sur } \mathcal{M}_n.}$$

II. Exemples

2 Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n$. Vérifions successivement les quatre conditions :

- $(\mathbf{C_1})$: comme A est symétrique, ${}^t\mathrm{A} = \mathrm{A}$ et le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$ convient.
- $(\mathbf{C_2})$: la symétrie de A assure que $\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A} = \mathrm{A}^2 = {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$, donc A est normale.
- $(\mathbf{C_3})$: pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{E}_n$, ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{X} = \mathrm{A}\mathrm{X}$. Ainsi, leurs normes sont égales.
- $(\mathbf{C_4})$: d'après le théorème spectral, l'endormorphisme canoniquement associé à la matrice A est diagonalisable en base orthogonale, donc la condition est vérifiée avec des blocs de taille 1.

$$\boxed{\text{Les éléments de } \mathcal{S}_n \text{ vérifient les conditions } (\mathbf{C_1}), (\mathbf{C_2}), (\mathbf{C_3}) \text{ et } (\mathbf{C_4}).}$$

De même, pour $\mathrm{A} \in \mathcal{A}_n$,

- $(\mathbf{C_1})$: comme A est antisymétrique, ${}^t\mathrm{A} = -\mathrm{A}$ et le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = -\mathrm{X}$ convient.
- $(\mathbf{C_2})$: l'antisymétrie de A assure que $\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A} = -\mathrm{A}^2 = {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$, donc A est normale.
- $(\mathbf{C_3})$: pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{E}_n$, ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{X} = -\mathrm{A}\mathrm{X}$. Ainsi, leurs normes sont égales.

$$\boxed{\text{Les éléments de } \mathcal{A}_n \text{ vérifient les conditions } (\mathbf{C_1}), (\mathbf{C_2}) \text{ et } (\mathbf{C_3}).}$$

> On va démontrer dans la suite du problème que les quatre conditions sont équivalentes, ce qui vérifiera indirectement que les matrices de $\mathcal{A}_n$ remplissent aussi la condition $(\mathbf{C_4})$.