Centrale Maths 1 PSI 2020 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Angèle Niclas (ENS Lyon) ; il a été relu par Philippe Bouafia (professeur agrégé en école d'ingénieurs) et par Florian Metzger (professeur en CPGE).

L'objectif de ce problème est d'étudier la gestion des erreurs dans un processus industriel. Des variables aléatoires X_n modélisent le nombre d'erreurs se produisant à un instant n ; S_n est le nombre total d'erreurs enregistrées jusqu'à l'instant n. On cherche dans tout le sujet à estimer la probabilité $P(S_n > n\,a\,m)$ où $a > 1$ et m est le nombre moyen d'erreurs enregistrées à chaque instant. On juge que le système fonctionne et corrige ses erreurs si cette probabilité tend vers 0. Le sujet est découpé en trois parties globalement indépendantes, la première et la troisième utilisant les probabilités et la deuxième les matrices et la réduction des endomorphismes.

- Dans la partie I, on se place dans le cas simple où les variables X_n sont mutuellement indépendantes et suivent une loi de Poisson de paramètre $1/2$. À l'aide d'outils usuels de probabilité et de suites de fonctions, on prouve que $P(S_n > n)$ converge vers 0 exponentiellement vite.
- Dans la partie II, on cherche à démontrer partiellement le théorème de Perron-Frobenius : si A est une matrice strictement positive, alors son rayon spectral $\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{sp}\,(A)\}$ est une valeur propre dominante et l'espace propre associé possède certaines propriétés remarquables. Dans cette partie, les questions sont très liées les unes aux autres et demandent une bonne connaissance des outils d'algèbre linéaire.
- Dans la partie III, on considère cette fois que les variables X_n forment une chaîne de Markov, c'est-à-dire que ce qui se passe à l'instant n ne dépend que de ce qui s'est passé à l'instant $n-1$. On essaie alors de répondre à l'objectif initial du problème. Cette partie est très variée, incluant quelques questions de programmation, des applications numériques et la mise en application des résultats de la partie II.

Ce problème est assez long, avec des questions de difficulté variée dans chaque partie. La partie I reste très classique et constitue avec la partie III un bon sujet de révision de probabilités. La partie II peut être traitée indépendamment pour réviser tout ce qui touche aux matrices. Quant à la partie III, elle s'éloigne des sujets classiques et fait appel à des capacités de synthèse et d'interprétation des résultats. Attention, l'énoncé comporte quelques erreurs.

Indications

Partie I

1 Introduire $\mathcal{I}_k = \{(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n \mid i_1 + \cdots + i_n = k\}$ et remarquer que

$$(\mathrm{S}_n = k) = \bigcup_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathcal{I}_k} (\mathrm{X}_1 = i_1) \cap \cdots \cap (\mathrm{X}_n = i_n)$$

4 Utiliser les questions 2 et 3 pour calculer la fonction génératrice de S_n qui caractérise la loi de S_n.

6 Utiliser la définition $n\,! = \prod_{i=1}^{n} i$ et l'encadrement $n^k \leqslant \prod_{i=n+1}^{n+k} i \leqslant (n+k)^k$.

8 Utiliser la question 7 pour $x = 1/n$ et le théorème de continuité de la somme ou de la double limite.

9 Combiner les informations résultant des questions 5, 6 et 8.

Partie II

13 On peut choisir de raisonner par l'absurde en supposant que $\rho(\mathrm{A}) = 0$, puis utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.

16 Commencer par prouver que $\mathrm{A}^2|x| - \mathrm{A}|x| > 0$ et $\mathrm{A}|x| > 0$ en utilisant le résultat de la question 12, puis choisir un ε qui convient.

18 Montrer que $\rho(\mathrm{B}) < 1$ puis appliquer le résultat de la question 14.

19 Il faut conclure que l'hypothèse $|x| < \mathrm{A}|x|$ est fausse. Attention, la négation de $|x| < \mathrm{A}|x|$ n'est pas $x \geqslant \mathrm{A}|x|$.

20 On supposera à partir de cette question avoir prouvé en question 19 que $\mathrm{A}|x| = |x|$.

21 Montrer que $\mathrm{A}|x| = |\mathrm{A}x|$ et utiliser l'indication de la question pour $z_k = a_{1,k}x_k$.

22 Prendre deux vecteurs x, y linéairement indépendants dans $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$ et étudier le vecteur $z = x - (x_1/y_1)y$.

23 Synthétiser les questions 13, 14, 20, 21 et 22.

25 Décomposer Y selon $\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{sp}\,(\mathrm{A})} \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$ et utiliser le résultat de la question 24.

Partie III

29 Utiliser le système complet d'événements $(\mathrm{X}_n = i)_{0\leqslant i\leqslant \mathrm{N}}$.

30 Remarquer que la loi de X_n est caractérisée par Π_n.

31 Utiliser le résultat de la question 13 et de la proposition 1 sur $\mathrm{A}(t)$.

32 Utiliser la généralisation de la proposition 2 pour $\mathrm{A}(t)$ et le vecteur $\mathrm{Z}(t)$.

34 S'inspirer du résultat démontré à la question 27.

35 Utiliser la convergence uniforme, vers $t \mapsto \ln(\gamma(t))$, de la suite de fonctions

$$\left(t \mapsto \frac{\ln(\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\,t\mathrm{S}_n}))}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

36 Distinguer les cas $t = 0$ et $t > 0$.

37 Utiliser la caractérisation de la borne inférieure en t et l'inégalité démontrée à la question 36.

40 Utiliser l'information de l'énoncé sur le signe de $\lambda^*(x)$ en fonction de m pour trouver un encadrement de m, puis utiliser le résultat de la question 37 pour un ε bien choisi.

I. Cas de la loi de Poisson

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Introduisons pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'ensemble $\mathcal{I}_k$ défini par

$$\mathcal{I}_k = \{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n \mid i_1 + \cdots + i_n = k\}$$

On remarque alors que

$$(\mathrm{S}_n = k) = \bigcup_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathcal{I}_k} (\mathrm{X}_1 = i_1) \cap \cdots \cap (\mathrm{X}_n = i_n)$$

où l'union est disjointe. Soit $i_{n+1} \in \mathbb{N}$. Pour prouver que S_n et X_{n+1} sont indépendantes, vérifions que

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}_n = k, \mathrm{X}_{n+1} = i_{n+1}) = \mathrm{P}(\mathrm{S}_n = k)\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = i_{n+1})$$

Notons $\mathrm{C} = \mathrm{P}(\mathrm{S}_n = k, \mathrm{X}_{n+1} = i_{n+1})$. On constate que

$$\begin{aligned}
\mathrm{C} &= \mathrm{P}\Bigg(\bigcup_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathcal{I}_k} (\mathrm{X}_1 = i_1) \cap \cdots \cap (\mathrm{X}_n = i_n) \cap (\mathrm{X}_{n+1} = i_{n+1})\Bigg) \\
&= \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathcal{I}_k} \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = i_1, \dots, \mathrm{X}_n = i_n, \mathrm{X}_{n+1} = i_{n+1}) \qquad \text{(sigma additivité)} \\
&= \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathcal{I}_k} \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = i_1) \cdots \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = i_n)\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = i_{n+1}) \quad \text{(indépendance)} \\
\mathrm{C} &= \mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = i_{n+1}) \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathcal{I}_k} \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = i_1) \cdots \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = i_n)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on remarque que

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{S}_n = k) &= \mathrm{P}\Bigg(\bigcup_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathcal{I}_k} (\mathrm{X}_1 = i_1) \cap \cdots \cap (\mathrm{X}_n = i_n)\Bigg) \\
&= \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathcal{I}_k} \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = i_1, \dots, \mathrm{X}_n = i_n) \qquad \text{(sigma additivité)} \\
\mathrm{P}(\mathrm{S}_n = k) &= \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathcal{I}_k} \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = i_1) \cdots \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = i_n) \qquad \text{(indépendance)}
\end{aligned}$$

On a donc montré l'égalité souhaitée, et ainsi

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ les variables aléatoires } \mathrm{S}_n \text{ et } \mathrm{X}_{n+1} \text{ sont indépendantes.}}$$

2 La variable aléatoire X_1 suit la loi de Poisson de paramètre $1/2$ et

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = k)t^k = \frac{\mathrm{e}^{-1/2}}{2^k k\,!} t^k = \mathrm{e}^{-1/2} \frac{(t/2)^k}{k\,!}$$

D'après le cours, la série $\sum (t/2)^k / k\,!$ est convergente pour tout $t \in \mathbb{R}$, et sa somme vaut $\mathrm{e}^{t/2}$. La série $\sum \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = k)t^k$ est donc convergente pour tout $t \in \mathbb{R}$, et par suite,

$$\mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = k)t^k = \mathrm{e}^{-1/2}\mathrm{e}^{t/2} = \mathrm{e}^{\frac{t-1}{2}}$$

d'où

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}(t) = \mathrm{e}^{\frac{t-1}{2}}}$$

> Si X est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, on sait d'après le cours que $\mathrm{G}_\mathrm{X}(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ici, X_1 suit la loi de Poisson de paramètre $1/2$ et on retrouve le résultat précédent.

3 Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que la propriété

$$\mathscr{P}(n): \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t) = (\mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}(t))^n$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathscr{P}(1)}$ est vraie car $\mathrm{S}_1 = \mathrm{X}_1$.
- $\underline{\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)}$: on remarque que $\mathrm{S}_{n+1} = \mathrm{S}_n + \mathrm{X}_{n+1}$. En appliquant le résultat de la question 1, on sait que S_n et X_{n+1} sont indépendantes. On déduit d'après le cours que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

  $$\mathrm{G}_{\mathrm{S}_n+\mathrm{X}_{n+1}}(t) = \mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t)\mathrm{G}_{\mathrm{X}_{n+1}}(t)$$

  Par hypothèse de récurrence, $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t) = (\mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}(t))^n$. De plus, X_{n+1} suit la même loi que X_1 (la loi de Poisson de paramètre $1/2$), de sorte que $\mathrm{G}_{\mathrm{X}_{n+1}} = \mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}$. Finalement, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

  $$\mathrm{G}_{\mathrm{S}_{n+1}}(t) = \mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t)\mathrm{G}_{\mathrm{X}_{n+1}}(t) = (\mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}(t))^n\mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}(t) = (\mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}(t))^{n+1}$$

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t) = (\mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}(t))^n}$

4 En utilisant les résultats des questions 2 et 3, on voit que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t) = (\mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}(t))^n = (\mathrm{e}^{\frac{t-1}{2}})^n = \mathrm{e}^{\frac{n(t-1)}{2}}$$

On reconnaît l'expression de la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre $n/2$. Comme la fonction génératrice d'une variable aléatoire caractérise sa loi,

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } \mathrm{S}_n \text{ suit la loi de Poisson de paramètre } n/2.}$$

5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on écrit que

$$(\mathrm{S}_n > n) = \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} (\mathrm{S}_n = k)$$

où l'union est disjointe. En utilisant le résultat de la question 4 donnant la loi de S_n et la sigma additivité de la probabilité, on remarque que

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}_n > n) = \sum_{i=n+1}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{S}_n = i) = \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-n/2} n^i}{2^i\, i\,!}$$

En faisant le changement d'indice $k = i - n$, on obtient

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}_n > n) = \mathrm{e}^{-n/2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^{k+n}}{2^{k+n}(k+n)\,!} = \mathrm{e}^{-n/2} \left(\frac{n}{2}\right)^n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^k}{(n+k)\,!} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Finalement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n\,! \left(\frac{2}{n}\right)^n \mathrm{P}(\mathrm{S}_n > n) = \mathrm{e}^{-n/2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n\,! \, n^k}{(n+k)\,!} \left(\frac{1}{2}\right)^k}$