# Mines Maths 2 PSI 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Lerouvillois (ENS Lyon) ; il a été relu par Jean-Paul Bonnet (professeur en CPGE) et Florian Metzger (docteur en mathématiques).

Ce sujet d'analyse porte sur le problème des moments pour des densités de probabilité. Il est composé de cinq parties.

- La première partie propose l'étude d'exemples de densités $f$ (fonctions continues, positives, intégrables et d'intégrale 1) ainsi que le calcul de leurs moments d'ordre $n$ (intégrale de $x \mapsto x^n f(x)$) pour $n$ entier naturel. On y rencontre le cas de la densité exponentielle définie par $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et celui de la densité gaussienne définie par $x \mapsto (2\pi)^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ sur $\mathbb{R}$.
- La deuxième partie est consacrée à la démonstration du théorème d'approximation polynomiale de Stone-Weierstrass sur le segment $[\,0\,;1\,]$ au moyen des polynômes de Bernstein. Elle présente des calculs de sommes faisant intervenir les coefficients binomiaux. Celles-ci sont utilisées pour définir une suite de polynômes dont on montre la convergence uniforme vers une fonction continue prédéfinie.
- Dans la troisième partie, on montre que si deux densités sur $[\,0\,;1\,]$ ont les mêmes moments, alors elles sont égales. On utilise pour cela le théorème de Stone-Weierstrass, démontré dans la deuxième partie.
- La quatrième partie est dédiée au calcul de la transformée de Fourier de la densité gaussienne définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \qquad \widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t\xi}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$

  On montre que cette fonction est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on résout pour trouver que $\widehat{\varphi}(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi^2/2}$.
- Enfin, dans la dernière partie, on construit, grâce au résultat de la quatrième partie, un contre-exemple au problème des moments sur $[\,0\,;+\infty\,[$ où deux densités distinctes ont les mêmes moments.

Il s'agit d'un sujet intéressant et bien articulé qui aborde principalement les thèmes de l'intégrale généralisée, des intégrales à paramètres appliquées à la transformée de Fourier et, dans une moindre mesure, du calcul de sommes faisant intervenir les coefficient binomiaux.

# Indications

## Partie I

1 Commencer par calculer les intégrales sur le segment $[\,0\,;y\,]$ puis faire tendre $y$ vers l'infini. Calculer les moments par récurrence en effectuant une intégration par parties.

3 Penser au changement de variable $x \mapsto -x$ et à la parité de $\varphi$.

4 Intégrer par parties avec $u : x \mapsto x^{2p-1}$ et $v : x \mapsto -(2\pi)^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

5 Trouver une fonction positive, continue et d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}$ équivalente à $1/x^2$ en $+\infty$.

## Partie II

6 Penser à la formule du binôme de Newton.

7 Commencer par montrer que

$$\forall k \in [\![\,1\,;n\,]\!] \qquad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

8 Remarquer que $k^2 = k(k-1) + k$ puis montrer que

$$\forall k \in [\![\,2\,;n\,]\!] \qquad k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$$

9 Développer $(k - nx)^2$ et utiliser les résultats des questions 6, 7 et 8.

10 Montrer que pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\mathrm{B}_n(x) - f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|$$

Puis, pour $k \in \mathrm{X}$, utiliser la propriété vérifiée par $\alpha$.

11 Montrer que pour $k \in \mathrm{Y}$, $(k - nx)^2 \geqslant n^2\alpha^2$ et utiliser le résultat de la question 9.

## Partie III

12 Utiliser la linéarité de l'intégrale.

13 Montrer que la suite $((f-g)\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $(f-g)^2$.

14 Utiliser qu'une fonction positive, continue et d'intégrale nulle est nulle.

## Partie IV

15 Appliquer le théorème de continuité sous l'intégrale.

16 Appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale.

17 Effectuer une intégration par parties pour exprimer $\widehat{\varphi}\,'$ en fonction de $\widehat{\varphi}$.

## Partie V

19 Utiliser le changement de variable $u = \ln x$.

20 Commencer par montrer que $\mathrm{I}_n = \mathrm{Im}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n f(x)\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,2\pi\ln x}\,\mathrm{d}x\right)$.

21 Utiliser le résultat de la question 18 appliqué à $\xi = 2\pi - in$.

22 Pour quels $\alpha$ la fonction $g_\alpha$ est-elle positive et distincte de $f$ ? Utiliser ensuite le résultat de la question 21 pour montrer que $f$ et $g_\alpha$ ont les mêmes moments.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr

## I. Quelques exemples

**1** La fonction $g$ est continue et positive sur $[\,0\,;+\infty\,[$. Ensuite, pour tout $y \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^y \mathrm{e}^{\,-x}\,\mathrm{d}x &= \left[-\mathrm{e}^{\,-x}\right]_0^y\\ &= 1-\mathrm{e}^{\,-y}\end{aligned}$$

et donc
$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^y \mathrm{e}^{\,-x}\,\mathrm{d}x = 1$$

Comme $g$ est positive, on en déduit que $g$ est intégrable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et de masse 1. Ainsi,

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est une densité sur } [\,0\,;+\infty\,[.}$$

Montrons par récurrence que la propriété

$\mathscr{P}(n)$ : « le moment d'ordre $n$ de $g$ est fini et $m_n(g) = n\,!$ »

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie car $g$ est une densité.
- $\underline{\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)}$ : pour $y \geqslant 0$ fixé, réalisons une intégration par parties sur le segment $[\,0\,;y\,]$ appliquée aux fonctions $x \mapsto x^{n+1}$ et $x \mapsto -\mathrm{e}^{\,-x}$ qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;y\,]$.

$$\begin{aligned}\int_0^y x^{n+1}\mathrm{e}^{\,-x}\,\mathrm{d}x &= \left[x^{n+1}\left(-\mathrm{e}^{\,-x}\right)\right]_0^y - \int_0^y (n+1)\,x^n\left(-\mathrm{e}^{\,-x}\right)\,\mathrm{d}x\\ &= -y^{n+1}\mathrm{e}^{\,-y} + (n+1)\int_0^y x^n\mathrm{e}^{\,-x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

  Lorsque $y$ tend vers $+\infty$, $-y^{n+1}\mathrm{e}^{\,-y}$ tend vers 0 (par croissances comparées). Puis, par hypothèse de récurrence et produit de limites finies,

$$\lim_{y\to+\infty}(n+1)\int_0^y x^n\mathrm{e}^{\,-x}\,\mathrm{d}x = (n+1)\,n\,! = (n+1)\,!$$

  ce qui montre que le moment d'ordre $n+1$ de $g$ est fini et $m_{n+1}(g) = (n+1)\,!$ .
- $\underline{\text{Conclusion}}$ :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ le moment d'ordre } n \text{ de } g \text{ est fini et } m_n(g) = n\,!\,.}$$

**2** Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x^n\varphi(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, par croissances comparées :

$$x^n\mathrm{e}^{\,-x^2/2} \underset{x\to\pm\,\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

L'intégrale de la fonction $x \mapsto 1/x^2$ est une intégrale de référence convergente sur $[\,1\,;+\infty\,[$ et sur $]\,-\infty\,;-1\,]$ donc d'après le théorème de comparaison pour les intégrales généralisées, la fonction $x \mapsto x^n\varphi(x)$ est intégrable sur les intervalles $[\,1\,;+\infty\,[$ et $]\,-\infty\,;-1\,]$. Elle est également intégrable sur $[\,-1\,;1\,]$ car elle y est continue. Ainsi, la fonction $x \mapsto x^n\varphi(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{Tous les moments de la densité gaussienne } \varphi \text{ sont finis.}}$$

> D'après l'énoncé, il est visiblement admis que $\varphi$ est une densité. Le montrer revient à calculer la célèbre intégrale de Gauss :

> $$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$
>
> Pour ce faire, une méthode classique consiste à passer en coordonnées polaires dans l'intégrale double donnée par l'intégrale de Gauss élevée au carré mais cela est hors programme.

**3** Soit $p \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto -x$ étant une bijection strictement décroissante de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto x^{2p+1}\varphi(x)$ ayant une intégrale convergente sur $\mathbb{R}$ (d'après la question 2), par changement de variable généralisé, $x \mapsto (-x)^{2p+1}\,\varphi(-x)$ a également une intégrale convergente sur $\mathbb{R}$ et les deux intégrales sont égales. On en déduit que

$$\begin{aligned} m_{2p+1}(\varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p+1}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{2p+1}\,x^{2p+1}\varphi(-x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p+1}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \qquad (\varphi \text{ est paire}) \\ m_{2p+1}(\varphi) &= -m_{2p+1}(\varphi) \end{aligned}$$

Ainsi, $$\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \qquad m_{2p+1}(\varphi) = 0}$$

> Bien que cela ne figure pas explicitement au programme, on peut montrer, en toute généralité, que l'intégrale sur $\mathbb{R}$ (ou sur tout autre intervalle symétrique par rapport à 0) d'une fonction impaire intégrable est nulle (ce qui est le cas de la fonction $x \mapsto x^{2p+1}\varphi(x)$).
>
> La formule du changement de variable pour les intégrales généralisées nécessite de s'assurer qu'au moins une des intégrales est bien convergente. Autrement, on peut toujours calculer dans un premier temps l'intégrale sur un segment en effectuant un changement de variable usuel pour les fonctions continues sur un segment, puis faire tendre les bornes du segment vers les bornes de l'intervalle d'intégration.

**4** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On définit les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ suivantes

$$u : x \mapsto x^{2p-1} \quad \text{et} \quad v : x \mapsto -\varphi(x)$$

et on calcule leur dérivée pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$u'(x) = (2p-1)x^{2p-2} \quad \text{et} \quad v'(x) = -\varphi'(x) = x\,\varphi(x)$$

Comme la fonction $uv$ tend vers 0 en $\pm\infty$ et que $x \mapsto u(x)v'(x) = x^{2p}\varphi(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (d'après la question 2), par intégration par parties généralisée, la fonction $x \mapsto u'(x)v(x) = -(2p-1)x^{2p-2}\varphi(x)$ a une intégrale convergente sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p-1}\left(-\varphi'(x)\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[x^{2p-1}\left(-\varphi(x)\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} (2p-1)x^{2p-2}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

soit $$m_{2p}(\varphi) = (2p-1)m_{2(p-1)}(\varphi)$$

Par récurrence immédiate, on en déduit que

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad m_{2p}(\varphi) = m_0(\varphi)\,\prod_{k=1}^{p}(2k-1)$$