Mines Maths 1 PSI 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Rémi Pellerin (ENS Lyon) ; il a été relu par Céline Chevalier (enseignant-chercheur à l'université) et par Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Ce sujet propose d'établir des équivalents simples pour une famille d'applications développables en série entière sur $\mathbb{R}$. Il est composé de 4 parties largement indépendantes.

- La première partie est une mise en jambe qui a pour but d'une part d'établir un résultat de convergence utile pour la suite, et d'autre part d'écarter de l'étude qui suit quelques cas triviaux.
- La deuxième partie propose la preuve d'un cas particulier qui utilise la théorie des probabilités. Cela dit, il s'agit d'une utilisation purement analytique de cette théorie qui exclut tout argument de type combinatoire.
- La troisième partie est quant à elle plus délicate. Elle établit le résultat dans le cas général et constitue un très bon entraînement à la manipulation d'équivalents et de « petits o ».
- La quatrième partie propose une application simple à l'étude d'une équation différentielle. La question 18 est à savoir faire absolument ! Elle peut d'ailleurs être traitée indépendamment du reste du problème.

Dans l'ensemble, ce sujet est d'une difficulté raisonnable car tous les résultats utiles pour continuer à avancer sont donnés. Il y a néanmoins quelques questions délicates dans les parties II et III. De plus, le sujet est long et sa résolution complète dans les 3 heures imparties est un véritable défi ! Travailler ce sujet est une bonne idée pour réviser les chapitres relatifs aux séries entières, aux probabilités dans leur aspect purement analytique ainsi que le calcul de limites et la manipulation d'équivalents et de « petits o ».

Indications

1 Utiliser le critère de d'Alembert.

2 Penser aux développements en séries entières usuels.

4 Remarquer que $\mathbb{E}\left(\mathrm{X}_x\right) = \mathbb{V}\left(\mathrm{X}_x\right) = x$.

5 Commencer par établir, en utilisant l'inégalité de Markov, que

$$\forall x > 1 \qquad \left(1 - x^{\frac{-1}{3}}\right)^r \mathbb{P}\left[\left(\mathrm{Z}_x\right)^r \geqslant \left(1 - x^{\frac{-1}{3}}\right)^r\right] \leqslant \mathbb{E}\left(\left(\mathrm{Z}_x\right)^r\right)$$

puis que $\quad \forall x > 1 \qquad \mathbb{P}\left[\left(\mathrm{Z}_x\right)^r \geqslant \left(1 - x^{\frac{-1}{3}}\right)\right] = \mathbb{P}\left[\mathrm{Z}_x \geqslant 1 - x^{\frac{-1}{3}}\right]$

6 Simplifier $\dfrac{1}{n\,!}\sum\limits_{k=0}^{\mathrm{N}-1}(n-k)$; les premiers termes de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, x^n \prod\limits_{k=0}^{\mathrm{N}-1}(n-k)$ sont nuls.

7 Établir la relation suivante sur les polynômes

$$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^* \quad \exists!(a_1, \ldots, a_\mathrm{N}) \in \mathbb{R}^\mathrm{N} \qquad \mathrm{X}^\mathrm{N} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} a_k\, \mathrm{H}_k$$

où les polynômes H_k sont définis comme dans l'indication. Que vaut $\deg \mathrm{H}_k$?

8 Introduire l'application $f_s : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t^s - s(t-1) + 1 \end{cases}$ et étudier ses variations.
Ensuite, considérer l'égalité obtenue et l'appliquer à $t = \mathrm{Z}_x(\omega)$ pour $\omega \in \Omega$.

9 Établir grâce aux résultats des questions 5, 7 et 8 que pour $x > 1$,

$$\left(1 - x^{\frac{-1}{3}}\right)^r \mathbb{P}\left[\mathrm{Z}_x \geqslant 1 - x^{\frac{-1}{3}}\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\left(\mathrm{Z}_x\right)^r\right] \leqslant (1-s)\,\mathbb{E}\left[\left(\mathrm{Z}_x\right)^\mathrm{N}\right] + s\,\mathbb{E}\left[\left(\mathrm{Z}_x\right)^{\mathrm{N}-1}\right]$$

10 Prouver que

$$\forall x > 0 \qquad u_{n+1}(x) - u_n(x) = \frac{-x^n (n+1)^{r-1}}{n\,!}\,\varphi_x(n+1)$$

11 On pourra utiliser la question 10 pour calculer les limites

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi_x(x + r + \varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \varphi_x(x + r - \varepsilon)$$

12 Remarquer que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad (\lfloor x \rfloor + k)! \underset{x \to +\infty}{\sim} \lfloor x \rfloor! \times \lfloor x \rfloor^k$$

13 Utiliser la question 10.

14 Se servir du résultat établi à la question 13.

16 Pour établir la première égalité sur $\mathrm{S}_{r,1}(zx)$, on pourra raisonner avec la somme partielle et montrer que

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{D}_n\left(u_{n-1}(x) - u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(\mathrm{D}_{n+1} - \mathrm{D}_n\right) u_n(x) + \mathrm{D}_1\, u_0(x) - \mathrm{D}_\mathrm{N}\, u_\mathrm{N}(x)$$

avant de conclure avec la question 15.
Pour majorer $|\mathrm{S}_{r,1}(zx)|$, utiliser la question 10 et notamment, le fait que $u_n(x)$ est croissante puis décroissante, et toujours positive. Utiliser la question 11 pour justifier que $\lfloor t_x \rfloor \geqslant 1$ pour x suffisamment grand. Conclure grâce à la question 14.

17 Permuter les deux sommes en le justifiant.

18 Raisonner par analyse-synthèse et établir que, nécessairement,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad c_n = \frac{n}{(n\,!)^2}$$

I. Généralités, cas particuliers

1 Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Utilisons le critère de d'Alembert. Comme $(p\,n)^r \,/\, (p\,n)\,!$ ne s'annule pour aucune valeur de n, on peut écrire

$$\frac{(p(n+1))^r}{(p(n+1))\,!} \times \frac{(p\,n)\,!}{(p\,n)^r} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^r \times \frac{(p\,n)\,!}{(p(n+1))\,!}$$

Or,
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^r \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et
$$\frac{(p\,n)\,!}{(p(n+1))\,!} = \frac{1}{(p\,n+1)\times\cdots\times(p\,n+p)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{car } p \in \mathbb{N}^*$$

Ainsi, d'après le critère de d'Alembert,

$$\boxed{\text{Pour tout } p \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } r \in \mathbb{R}_+^*, \text{ le rayon de la série entière } \textstyle\sum_{n\geqslant 1} (p\,n)^r \,/\, (p\,n)!\, z^n \text{ est infini.}}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$, comme la série $\sum a_n\, z^n$ converge absolument sur $\mathbb{C}$, il y a également convergence absolue de $\sum a_n\, z^{pn}$. Ainsi, la série $\sum a_n\, z^{pn}$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ donc le rayon de convergence de cette série entière est infini. Ainsi,

$$\boxed{\text{Pour tout } p \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } r \in \mathbb{R}_+^*, \text{ le rayon de la série entière } \textstyle\sum_{n\geqslant 1} (p\,n)^r \,/\, (p\,n)!\, z^{pn} \text{ est infini.}}$$

> Plus généralement, si R désigne le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, z^n$, alors le rayon de convergence de $\sum a_n\, z^{pn}$ vaut $\sqrt[p]{\mathrm{R}}$. Ce résultat est valable pour $\mathrm{R} = +\infty$ si l'on convient que $\sqrt[p]{+\infty} = +\infty$.

2 Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 1, on peut écrire

$$\mathrm{S}_{0,1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^0}{n\,!}\, x^n$$

d'où
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}_{0,1}(x) = \mathrm{e}^{\,x} - 1}$$

De même, la question 1 permet d'affirmer l'existence de la somme infinie

$$\mathrm{S}_{0,2}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)^0}{(2n)\,!}\, x^{2n}$$

puis
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}_{0,2}(x) = \mathrm{ch}\,(x) - 1}$$

> Rappelons les sommes de séries entières suivantes, valables pour tout $z \in \mathbb{C}$:
> $$\mathrm{e}^{\,z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n\,!} \qquad \mathrm{ch}\,(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)\,!} \qquad \mathrm{sh}\,(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)\,!}$$

De plus, on a les équivalents suivants :

$$\mathrm{e}^{\,x} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\,x} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ch}\,(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{\,x}}{2}$$

Par conséquent, $\boxed{\text{Les énoncés } \mathrm{H}_{0,1} \text{ et } \mathrm{H}_{0,2} \text{ sont valides.}}$

II. Une démonstration probabiliste de $H_{r,1}$

3 Pour montrer que la variable aléatoire $(Z_x)^r$ admet une espérance finie, il suffit, d'après le théorème de transfert, d'établir que la série

$$\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{n}{x}\right)^r \mathbb{P}\left(X_x=n\right)=\frac{e^{-x}}{x^r}\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^r\,x^n}{n\,!}$$

converge absolument. Or, la question 1 permet d'affirmer que cette série est effectivement absolument convergente en prenant $p=1$. Ainsi, la variable aléatoire $(Z_x)^r$ admet une espérance finie et celle-ci vaut

$$\boxed{\mathbb{E}\left[(Z_x)^r\right]=\frac{e^{-x}}{x^r}\,S_{r,1}(x)}$$

4 L'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $x>0$ sont égales et valent x, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall x>0 \qquad \mathbb{E}\left(X_x\right)=\mathbb{V}\left(X_x\right)=x}$$

Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire réelle de variance finie Z_x. Comme $x^{-1/3}>0$,

$$\mathbb{P}\big(\,|Z_x-\mathbb{E}\left(Z_x\right)|>x^{\frac{-1}{3}}\big)\leqslant\frac{\mathbb{V}\left(Z_x\right)}{\left(x^{\frac{-1}{3}}\right)^2}$$

Or, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}\left(Z_x\right)=\dfrac{1}{x}\,\mathbb{E}\left(X_x\right)$, et donc

$$\mathbb{E}\left(Z_x\right)=\frac{1}{x}\times x=1$$

De même, $$\mathbb{V}\left(Z_x\right)=\frac{1}{x^2}\,\mathbb{V}\left(X_x\right)=\frac{1}{x^2}\times x=\frac{1}{x}$$

Ainsi, $$\mathbb{P}\big(\,|Z_x-1|\geqslant x^{\frac{-1}{3}}\big)\leqslant\frac{1/x}{x^{\frac{-2}{3}}}=x^{\frac{-1}{3}}$$

Or, $x^{\frac{-1}{3}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ et une probabilité est toujours positive donc, par encadrement,

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\,|Z_x-1|\geqslant x^{\frac{-1}{3}}\big)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}$$

> Il ne faudrait pas conclure en invoquant un passage à la limite ! En effet, le passage à la limite suppose que les limites existent justement. Ici, on encadre une quantité par deux autres qui convergent vers la même limite car
>
> $$0\leqslant\mathbb{P}\big(\,|Z_x-1|\geqslant x^{\frac{-1}{3}}\big)\leqslant x^{\frac{-1}{3}}$$
>
> Comme $$x^{-1/3}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$
>
> on montre d'une part que la limite de la probabilité au centre existe quand x tend vers $+\infty$, et d'autre part que cette limite vaut nécessairement 0.

5 Appliquons l'inégalité de Markov à la variable aléatoire positive $(Z_x)^r$. Comme par hypothèse $x>1$, on a $(1-x^{-1/3})>0$, donc $(1-x^{-1/3})^r$ est bien défini et strictement positif. Ainsi,

$$\mathbb{P}\left[(Z_x)^r\geqslant\left(1-x^{\frac{-1}{3}}\right)^r\right]\leqslant\frac{\mathbb{E}\left((Z_x)^r\right)}{\left(1-x^{\frac{-1}{3}}\right)^r}$$