CCINP Maths PSI 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Christophe Fiszka (professeur en CPGE) ; il a été relu par Corentin Fierobe (ENS Lyon) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants : le premier d'analyse, le second d'algèbre linéaire.

- Le premier problème contient deux parties indépendantes. Dans la première, on construit, à l'aide des intégrales à paramètre et des séries de fonctions, deux exemples de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ qui ne sont pas développables en série entière au voisinage de 0 :

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(1-\mathrm{i}tx)}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k(1-\mathrm{i}kx)}$$

  La seconde partie est consacrée à une démonstration du théorème de Borel : « Pour toute suite réelle $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$, il existe f, une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, telle que pour tout entier p, $f^{(p)}(0) = b_p$. » En particulier, on retrouve le résultat de la première partie : il existe des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont la série de Taylor

$$\sum_{p\geqslant 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p\,!}\,x^p$$

  est divergente.

- Le second problème étudie les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice tridiagonale à deux paramètres. Les résultats obtenus sont appliqués à la résolution d'un système différentiel linéaire du second ordre.

Ce sujet comporte peu de subtilités ou de grandes difficultés conceptuelles, mais il s'avérera très utile pour ceux qui voudront tester leur maîtrise des bases en analyse avec le premier problème (intégrales à paramètre, développements en série) et en algèbre linéaire avec le second (réduction des matrices). Autre avantage, on peut traiter chaque problème séparément en consacrant deux heures à chacun.

Indications

Problème I

1 Si $z = a + \mathrm{i}\, b$ est un nombre complexe sous forme algébrique alors

$$|\mathrm{e}^{\,z}| = |\mathrm{e}^{\,a+\mathrm{i}b}| = \mathrm{e}^{\,a}$$

En déduire l'intégrabilité de $f(x)$.

2 Procéder par intégration par parties.

4 Appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre (ou théorème de Leibniz).

5 En partant de $f^{(p)}(0) = \mathrm{i}^p (2p)\,!$, vérifier que le rayon de convergence est nul.

6 Appliquer le théorème de dérivation terme à terme pour les séries de fonctions.

7 Minorer la somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} k^{2p}\mathrm{e}^{\,-k}$ par l'un de ses termes.

8 Justifier que, pour tout $r > 0$, la série $\sum g^{(p)}(0)\, r^p /\, p\,!$ diverge grossièrement en minorant le terme général.

11 Utiliser la question 9 et la linéarité de la dérivation pour justifier l'égalité

$${\varphi_1}^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p\,!}{2\mathrm{i}} \left(\frac{(x+\mathrm{i})^{p+1} - (x-\mathrm{i})^{p+1}}{(1+x^2)^{p+1}} \right)$$

12 Utiliser les relations sur les nombres complexes :

$$\mathrm{Im}\,(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}} \qquad \text{et} \qquad |\mathrm{Im}\,(z)| \leqslant |z|$$

13 Appliquer le résultat de la question 12 avec $\varphi_\alpha(x) = \varphi_1(\alpha x)$.

14 C'est une application de la formule de Leibniz pour calculer les dérivées successives d'un produit de fonctions dérivables.

15 Attention, 0^k vaut 1 si $k = 0$.

16 Utiliser les questions 13 et 14 ainsi que la formule du binôme de Newton pour justifier l'inégalité

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

17 Appliquer le théorème de dérivation terme à terme pour les séries de fonctions. Prouver la convergence uniforme de la série $\sum_n {u_n}^{(p)}$ à l'aide de la convergence normale de la série $\sum_{n\geqslant p} {u_n}^{(p)}$ sur tout intervalle du type $[\,-b\,;b\,]$ et l'inégalité de la question 16.

18 Utiliser la question 15.

19 Construire par récurrence une suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, p \in \mathbb{N} \qquad \sum_{n=0}^{p-1} {u_n}^{(p)}(0) + p\,!\, a_p = b_p$$

Problème II

20 Le vecteur x est propre pour la valeur propre λ si x est non nul et $\mathrm{A}x = \lambda x$.

21 Utiliser la question 20 et l'inégalité triangulaire. N'oubliez pas de préciser qu'un vecteur propre est par définition non nul. Ainsi, $x_{i_0} \neq 0$.

22 La matrice $\mathrm{A}_n(\alpha, \beta)$ est symétrique réelle.

23 Utiliser la question 21.

25 Développer le déterminant suivant la première ligne puis un des deux déterminants obtenus suivant la première colonne. En déduire la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\,;1\,;2\,\} \qquad \chi_{\mathrm{A}_n(0,1)} = \mathrm{X} \times \chi_{\mathrm{A}_{n-1}(0,1)} - \chi_{\mathrm{A}_{n-2}(0,1)}$$

26 Utiliser une récurrence double

$$\mathscr{P}(n) : \quad \text{« } \mathrm{U}_n\left(\cos(\theta)\right) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \quad \mathrm{U}_{n-1}\left(\cos(\theta)\right) = \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} \text{ »}$$

Les formules trigonométriques sont rappelées en fin d'ouvrage. Par exemple, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

27 Vérifier que la matrice $\mathrm{A}_n(0,1)$ admet n valeurs propres distinctes données par les $2\cos\left(j\pi/(n+1)\right)$, où $j \in [\![\, 1\,; n\,]\!]$.

29 Penser aux suites récurrentes linéaires d'ordre 2

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \qquad v_{k+2} = \alpha v_{k+1} + \beta v_k$$

L'expression de v_k dépend du discriminant de l'équation caractéristique.

30 Vérifier qu'il existe un réel μ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \mu \sin(k\theta_j)$.

32 Partir de l'égalité $\mathrm{A}_n(\alpha, \beta) = \alpha \mathrm{I}_n + \beta \mathrm{A}_n(0,1)$.

35 La matrice $\mathrm{D} + (1/p)\mathrm{I}_n$ n'est pas inversible si et seulement si $-1/p$ est une racine du polynôme caractéristique χ_{D}.

36 Si $\mathrm{D}_p = \mathrm{D} + (1/p)\mathrm{I}_n$ est inversible, la relation suivante est vraie :

$$\det\left(\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D}_p \end{pmatrix}\right) = \det(\mathrm{A}\mathrm{D}_p - \mathrm{B}\mathrm{C})$$

Passer à la limite en invoquant la continuité.

37 Utiliser la relation (1) avec les polynômes caractéristiques χ_{N} et χ_{M}.

39 Une matrice A est inversible si et seulement si 0 n'est pas une valeur propre de A. De plus, une matrice A est diagonalisable si et seulement si il existe une base de vecteurs propres.

40 Prendre $\alpha = -2$ et $\beta = 1$.

41 Vérifier que les valeurs propres de la matrice $\mathrm{A}_2(-2, 1)$ et les vecteurs propres associés sont

$$-1 \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad -3 \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En déduire les valeurs propres de B à l'aide de la question 38.

42 Les colonnes de la matrice P sont les vecteurs propres de B dont la première composante est 1, associés aux valeurs propres $-\mathrm{i}\sqrt{3}$, $\mathrm{i}\sqrt{3}$, $-\mathrm{i}$ et i.

44 Le vecteur X est solution de $\mathrm{X}' = \mathrm{B}\mathrm{X}$ si et seulement si $\mathrm{Y} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$ est solution de $\mathrm{Y}' = \mathrm{D}\mathrm{Y}$.

PROBLÈME I

Partie I. Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables

1 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ si, pour tout réel x, $f(x)$ est une intégrale convergente. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t(1-\mathrm{i}tx)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. On a donc une intégrale généralisée en $+\infty$. Or, pour tout réel t

$$\left|\mathrm{e}^{-t(1-\mathrm{i}tx)}\right| = \left|\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2x}\right| = \left|\mathrm{e}^{-t}\right|\ \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2x}\right| = \mathrm{e}^{-t}$$

De plus, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente. En effet, pour $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{\mathrm{A}} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{\mathrm{A}} = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{A}} \underset{\mathrm{A}\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \in \mathbb{R}$$

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(1-\mathrm{i}tx)}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

2 Soit $p \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^p\mathrm{e}^{-t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. On a donc une intégrale généralisée en $+\infty$. De plus, le théorème des croissances comparées implique

$$t^p\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} 1/t^2\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente (en $+\infty$). Par le critère de domination des intégrales à paramètre dans le cas positif

$$\boxed{\text{Pour tout } p \in \mathbb{N}, \text{ l'intégrale généralisée } \Gamma_p = \int_0^{+\infty} t^p\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$$

Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$. Intégrons par parties

$$\int_0^{\mathrm{A}} t^{p+1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[t^{p+1}\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)\right]_0^{\mathrm{A}} - \int_0^{\mathrm{A}} (p+1)t^p\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)\,\mathrm{d}t$$
$$\int_0^{\mathrm{A}} t^{p+1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{A}^{p+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{A}} + (p+1)\int_0^{\mathrm{A}} t^p\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Lorsque $\mathrm{A} \to +\infty$ $\qquad \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{p+1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = (p+1)\int_0^{+\infty} t^p\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

C'est-à-dire $\qquad \boxed{\forall\, p \in \mathbb{N} \qquad \Gamma_{p+1} = (p+1)\Gamma_p}$

3 Montrons par récurrence que la propriété

$$\mathscr{P}(p) : \quad \text{« } \Gamma_p = p\,! \text{ »}$$

est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie puisque

$$\Gamma_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 = 0\,!$$