Mines Maths 2 PC 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jean-Paul Bonnet (professeur en CPGE) ; il a été relu par David Michel (ENS Rennes) et William Aufort (professeur en CPGE).

L'objectif de cette épreuve est d'étudier la dérivabilité en 0 et en π de la fonction R définie par la somme d'une série de fonctions :

$$\mathrm{R}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n^2 x\right)}{n^2}$$

Le sujet comporte quatre parties.

- Dans la partie I, il est demandé d'établir des résultats élémentaires de convergence d'une série de fonctions et d'une intégrale. Cette partie se termine par la preuve qu'une certaine intégrale à paramètre définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
- Dans la partie II, on établit la non-dérivabilité en 0 de R. Pour cela, on prouve une égalité entre une fonction définie par une série et une intégrale à paramètre. Le calcul de l'équivalent de R en 0 se fait notamment en utilisant la caractérisation séquentielle de la limite et le théorème de convergence dominée.
- Dans la partie III, on démontre une formule sommatoire dite de Poisson. Pour ce faire, on prouve la continuité et la $2\pi-$périodicité de deux fonctions avant d'en calculer les coefficients de Fourier complexes. Les objets sont définis dans le sujet et un résultat central est admis. Il est besoin d'établir certaines inégalités techniques.
- Enfin dans la partie IV, on établit la dérivabilité en π de la fonction R. Pour cela, on démontre de façon classique le caractère $\mathscr{C}^\infty$ d'une certaine fonction qui est a priori définie par morceaux. Puis, à grand renfort d'intégrations par parties, la convergence d'une intégrale ainsi que des inégalités afin d'appliquer la formule sommatoire de Poisson. Ce travail débouche sur l'existence pour R d'un développement limité au voisinage de π qui permet de conclure.

Ce sujet est classique et parcourt une bonne partie du programme d'analyse de la filière PC. La moitié des questions environ sont relativement faciles, d'autres sont des variations de méthodes classiques. Enfin, certaines questions réclament de vérifier scrupuleusement les conditions d'application des résultats prouvés ou admis. Plus précisément, ce sujet aborde les fonctions d'une variable réelle, les suites et séries de fonctions, l'intégration sur un intervalle quelconque et les intégrales à paramètre.

Indications

Partie II

5 Utiliser la convergence de S établie en question 4 pour justifier de la convergence de l'intégrale.

6 Utiliser une minoration de $\lfloor x \rfloor$ à partir de l'inégalité qui la définit.

7 Utiliser la limite par la caractérisation séquentielle de la limite à l'aide du théorème de convergence dominée. La majoration se fait par morceaux à l'aide de celle obtenue en question 6.

8 Appliquer le résultat de la question 7 à la fonction $x \mapsto \sin(x^2)/x^2$ convenablement prolongée par continuité en 0. Veiller à bien établir la condition de domination nécessaire. Exprimer ensuite $\mathrm{S}(h)$ en fonction de R, ce qui permet d'en déduire l'équivalent de R à droite de 0. Conclure enfin sur la dérivabilité de R en 0 avec le taux d'accroissement.

Partie III

9 Prouver la convergence normale sur tout segment.

11 Utiliser le résultat admis sur les séries de Fourier, à savoir que si deux fonctions continues et 2π-périodiques ont les mêmes coefficients de Fourier complexes, alors elles sont égales.

12 Appliquer la formule précédente à la fonction $h(t) = f\,(at/2\pi)$ ce qui conduit à vérifier une majoration sur $f\,(at/2\pi)$ et une majoration sur $\widehat{f}\,(2\pi x/a)$.

Partie IV

15 Procéder à une réduction du domaine par parité de la fonction. Effectuer ensuite le changement de variable $x \mapsto x^2$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Il en résulte une intégrale dont la partie sur $]\,0\,;1\,]$ converge classiquement. Pour le morceau restant, effectuer une intégration par parties.

16 Intégrer deux fois par partie l'application $x \mapsto x^2\widehat{f}(x)$ et utiliser les questions 14 et 15 pour prouver l'existence de l'intégrale et établir le résultat demandé.

17 Appliquer la formule sommatoire de Poisson établie en question 12 à la fonction f. Pour justifier que f vérifie les hypothèses de la formule, utiliser la question 16, sans oublier de vérifier que $\widehat{f}$ est bien définie et continue. Le terme b se déduit rapidement mais le terme a requiert le calcul de $\widehat{f}(0)$ ce qui se fait par intégration par parties.

18 Remarquer que n et n^2 ont la même parité ce qui permet une compensation des termes en sommant $\mathrm{F}\,(4x)$ et $\mathrm{F}\,(x+\pi)$.

19 Utiliser la question 18 pour obtenir une expression de $\mathrm{F}(x+\pi)$ dont on déduit un développement limité à l'aide de la formule de la question 17.

I. Préliminaires

1 La fonction R est la somme d'une série de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont on va vérifier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n\colon x \mapsto \sin(n^2 x)/n^2$. Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et par majoration classique de la fonction sinus, on a

$$\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n^2}$$

qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. Ceci prouve la convergence normale de la série de fonctions de terme général f_n sur $\mathbb{R}$ donc sa convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$. Dès lors,

$$\boxed{\text{La fonction R est définie et continue sur } \mathbb{R}.}$$

2 Tout d'abord, la fonction $g\colon x \mapsto \sin(x^2)/x^2$ est continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Au voisinage de 0,

$$\frac{\sin(x^2)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} 1$$

par équivalent classique de la fonction sinus au voisinage de 0. Dès lors, g est prolongeable par continuité en $x = 0$ par la valeur 1. L'intégrale proposée est par conséquent faussement impropre en 0 et

$$\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

converge. Pour $x \geqslant 1$, on a

$$\left|\frac{\sin(x^2)}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$$

par majoration classique du sinus. La fonction $x \mapsto 1/x^2$ est intégrable sur $[\,1\,;+\infty\,[$ par le critère de Riemann. Dès lors, la fonction g est intégrable sur $[\,1\,;+\infty\,[$ d'où

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

est convergente. En conclusion,

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x \text{ est convergente.}}$$

3 La fonction $\widehat{f}$ s'appelle la transformée de Fourier de la fonction f, c'est une notion d'analyse harmonique qui sert notamment en théorie du signal.

Il s'agit ici d'une intégrale à paramètre, on va par conséquent appliquer le théorème de continuité sous le signe intégrale.

- Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-ixt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ puisque f l'est et que $t \mapsto e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$;
- Pour $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(t)e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$;
- Pour $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, $\left|f(t)e^{-ixt}\right| \leqslant |f(t)|$, avec $|f|$ positive, continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse.

$$\boxed{\text{Les conditions étant vérifiées, la fonction } \widehat{f} \text{ est bien définie et continue sur } \mathbb{R}.}$$

II. Étude de la dérivabilité de R en 0

4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $h > 0$. En utilisant les hypothèses faites sur f, il vient

$$|f(nh)| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{n^2h^2+1} \leqslant \frac{\mathrm{C}}{n^2h^2}$$

ce qui prouve qu'à partir du rang $n = 1$ le terme général de $\mathrm{S}(h)$ est majoré par celui d'une série convergente d'après le critère de Riemann. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{S}(h) \text{ existe pour tout } h > 0.}$$

5

> Cette question demande d'établir un lien entre une série et une intégrale. Il faut donc s'inspirer de la démonstration du théorème de comparaison série-intégrale. Par ailleurs, les questions mettant en jeu une partie entière sont souvent facilement réglées en se ramenant à l'inégalité la caractérisant :
>
> $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $h > 0$. Pour tout $t \in [\,nh\,; (n+1)h\,[$ on a, par définition de la partie entière, $\lfloor t/h \rfloor = n$ d'où $\phi_h(t) = f\left(\lfloor t/h \rfloor h\right) = f\left(nh\right)$ et

$$\int_{nh}^{(n+1)h} f\left(\lfloor t/h \rfloor h\right)\,\mathrm{d}t = f\left(nh\right)\int_{nh}^{(n+1)h}\mathrm{d}t = hf\left(nh\right)$$

par linéarité de l'intégrale. Cette égalité et la convergence de S prouvent celles de la série

$$\sum_{n\geqslant 0}\int_{nh}^{(n+1)h}\phi_h(t)\,\mathrm{d}t$$

et la relation de Chasles donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{nh}^{(n+1)h}\phi_h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\phi_h(t)\,\mathrm{d}t$$

En conclusion, on a bien $\boxed{\mathrm{S}(h) = \int_0^{+\infty}\phi_h(t)\,\mathrm{d}t}$

6

> Ici l'inégalité demandée s'établit, comme c'est parfois le cas, en « inversant » celle donnée par la partie entière.
>
> $$\forall x \in \mathbb{R} \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$

D'une part, en appliquant l'inégalité vérifiée par f, on a

$$|\phi_h(t)| = \left|f\left(\left\lfloor \frac{t}{h}\right\rfloor h\right)\right| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{\left(\lfloor t/h \rfloor h\right)^2+1} \tag{1}$$

D'autre part, comme $t \geqslant 1$ et $h \in \left]\,0\,;1\,\right]$, en utilisant l'inégalité sur les parties entières on a

$$0 \leqslant t-1 \leqslant t-h = \left(\frac{t}{h}-1\right)h < \left\lfloor\frac{t}{h}\right\rfloor h$$