Mines Maths 2 MP 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Bertrand Wiel (professeur en CPGE) ; il a été relu par Florian Metzger (docteur en mathématiques) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

L'objet de ce problème est la détermination d'une suite de majorants du rayon spectral ρ_n de la matrice de Hilbert $(1/(j+k+1))_{0\leqslant j,k\leqslant n-1}$ et l'étude du comportement asymptotique de cette suite. Il s'agit d'un résultat publié en 2005 par Peter Otte. Il établit une relation entre la matrice de Hilbert et un opérateur intégral à noyau positif K_n auquel on applique un principe de min-max pour obtenir l'égalité

$$\rho_n = \inf_{\varphi\in\mathscr{A}} \sup_{x\in]\,0\,;\,1\,[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 \mathrm{K}_n(tx)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

où $\mathscr{A}$ est un ensemble de fonctions.

- La première partie est consacrée à l'étude, à l'aide d'outils d'algèbre linéaire et euclidienne, du sous-espace propre associé à ρ_n. On montre qu'il est de dimension 1 et engendré par un vecteur à coordonnées strictement positives.
- La seconde établit la majoration $\rho_n \leqslant \pi$ à l'aide de relations entre les coefficients de la matrice de Hilbert et l'intégration de fonctions polynomiales.
- La troisième fait le lien entre la matrice de Hilbert et l'opérateur intégral puis établit l'expression de ρ_n comme borne inférieure sur l'ensemble $\mathscr{A}$.
- La dernière partie a pour objectif de calculer cette expression pour une sous-famille particulière de fonctions à l'aide d'intégrales à paramètre et d'en déduire une suite de majorants et son comportement asymptotique.

Le thème du sujet est intéressant et permet d'obtenir un résultat non trivial en recourant à de nombreuses méthodes d'analyse et d'algèbre.

L'épreuve possède cependant plusieurs défauts très regrettables pour un sujet de concours. Le plus important étant celui d'utiliser à la première question une notion hors programme (matrice définie positive) sans en donner la définition. En outre, elle n'est pas assez progressive. La question 2 comporte une implication difficile pour les candidats qui n'ont pas rencontré l'étude de la matrice de Hilbert ou du théorème de Perron-Frobenius. Enfin la dernière partie est une suite de calculs complexes. L'énoncé comporte dans cette partie des erreurs qui n'ont certainement pas permis aux candidats d'aborder la dernière question, elle aussi d'un niveau très élevé.

C'est un sujet dont les trois premières parties méritent d'être travaillées, pour les méthodes employées et les résultats autour de la matrice de Hilbert, mais il n'intéressera comme outil de révision et d'entraînement que les tout meilleurs candidats.

Indications

Partie A

2 Pour l'implication réciproque, appliquer le théorème spectral afin de décomposer une colonne X dans une base orthonormée puis majorer la quantité ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{H}_n\mathrm{X}$ par $\rho_n\|\mathrm{X}\|$. Se servir alors de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour discuter le cas d'égalité.

3 Utiliser la question 2 pour déduire que $|\mathrm{X}_0| \in \mathscr{V}$.

4 Exploiter le fait que les coefficients de H_n sont strictement positifs.

5 Construire une combinaison linéaire de deux vecteurs propres de $\mathscr{V}$ dont un coefficient est nul et en déduire qu'ils sont proportionnels.

Partie B

6 Commencer par calculer $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{P}\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\right)\mathrm{d}\theta$ pour des polynômes élémentaires X^k.

7 Développer $|\widetilde{\mathrm{X}}(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta})|^2$ pour faire apparaître une somme de termes constants et une somme de termes périodiques dont l'intégrale sur $[\,0\,;\pi\,]$ est nulle.

8 Construire à partir des coordonnées d'un vecteur propre X_0 de H_n une colonne X'_0 de taille $n+1$ telle que ${}^t\mathrm{X}'_0\,\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{X}'_0 = \rho_n\|\mathrm{X}'_0\|^2$.

Partie C

10 Identifier les coefficients de $(\mathrm{H}_n)_{j,k}$ à l'intégrale sur $[\,0\,;1\,]$ de la fonction $t \longmapsto t^{j+k}$.

11 Exprimer la fonction $\rho_n\widetilde{\mathrm{X}_0}/\varphi$ à l'aide de l'opérateur intégrale T_n puis la majorer en faisant apparaître

$$\sup_{t\in\,]\,0\,;\,1\,[}\frac{\widetilde{\mathrm{X}_0}(t)}{\varphi(t)}$$

dont on prouvera l'existence. Utiliser la définition de la borne supérieure.

Partie D

12 Appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

13 Intégrer $\mathrm{J}_n(x)$ par parties en utilisant la primitive $t \longmapsto t-1$.

16 Exploiter l'équation différentielle dont φ est solution et utiliser le formulaire fourni par l'énoncé pour exprimer le coefficient c_n à l'aide de la fonction Γ.

18 Dans le calcul de l'intégrale en question 11, utiliser le fait que $\mathrm{K}_n(tx)$ est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison tx.

19 Choisir la valeur $\alpha = 1/2$ et utiliser le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

20 Utiliser la formule de Stirling, puis chercher un développement limité à l'ordre 1 et au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto \mathrm{Arcsin}\,(1-x^2)$.

A. Une propriété de Perron-Frobenius

1 La notion de matrice définie positive est explicitement hors programme et aurait dû être définie dans l'énoncé. Si on fixe une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ d'un espace réel de dimension n, les matrices symétriques réelles définies positives de taille n sont exactement les matrices dans cette base des produits scalaires, la bijection entre la matrice S et le produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ étant réalisée par la relation $\mathrm{S} = ((e_i \mid e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Notons X la matrice des coordonnées dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ d'un vecteur de l'espace euclidien muni de ce produit scalaire, le réel ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{SX}$ s'identifie alors au carré de la norme euclidienne associée.

$$\begin{aligned} {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{SX} &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{S}_{i,j} \mathrm{X}_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{X}_i \mathrm{X}_j (e_i \mid e_j) \right) \qquad (\text{comme } \mathrm{S}_{i,j} = (e_i|e_j)) \\ {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{SX} &= \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} \mathrm{X}_j e_j \right) \end{aligned}$$

La matrice H_n est réelle et symétrique puisque pour tous j, k de $[\![\, 0\,; n-1 \,]\!]$

$$h_{j,k}^{(n)} = \frac{1}{j+k+1} = h_{k,j}^{(n)}$$

Montrons son caractère définie positive, c'est-à-dire que pour toute matrice colonne $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle, ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{H}_n\mathrm{X} > 0$. Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, développons

$$\begin{aligned} {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{H}_n\mathrm{X} &= \sum_{j=0}^{n-1} x_j \left(\mathrm{H}_n\mathrm{X}\right)_{j,1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} x_j \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{j+k+1} x_k \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} x_j \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_0^1 t^{j+k}\, \mathrm{d}t \right) x_k \\ &= \int_0^1 \sum_{j=0}^{n-1} x_j t^j \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k \,\mathrm{d}t \qquad (\text{linéarité de l'intégrale}) \\ &= \int_0^1 \widetilde{\mathrm{X}}(t)\widetilde{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t \\ {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{H}_n\mathrm{X} &= \int_0^1 \widetilde{\mathrm{X}}(t)^2\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ceci fournit ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{H}_n\mathrm{X} \geqslant 0$.

La fonction polynomiale $\widetilde{\mathrm{X}}^2$ est continue et positive donc si

$$\int_0^1 \left(\widetilde{\mathrm{X}}(t)\right)^2 \,\mathrm{d}t = 0$$

alors $\widetilde{\mathrm{X}}^2$ est nulle sur $[\,0\,;1\,]$. Son polynôme associé, possédant une infinité de racines, est nul d'où $\mathrm{X} = 0$. Réciproquement si $\mathrm{X} = 0$, on a bien ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{H}_n\mathrm{X} = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\text{La matrice } \mathrm{H}_n \text{ est symétrique réelle et définie positive.}}$$

2 Si $X \in \mathscr{V}$ alors $H_n X = \rho_n X$ d'où

$$ {}^t X\, H_n X = \rho_n\, {}^t X\, X = \rho_n \|X\|^2 $$

Comme H_n est symétrique et réelle, elle possède des valeurs propres réelles et, d'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée de vecteurs propres de H_n. Notons $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une telle base, associée aux valeurs propres $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, non nécessairement distinctes. Ces valeurs propres sont strictement positives. En effet, si on applique le calcul de la question 1 à chaque $X_i \neq 0$ on trouve

$$ 0 < {}^t X_i\, H_n X_i = {}^t X_i (\lambda_i X_i) = \lambda_i \|X_i\|^2 $$

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur quelconque décomposé dans la base orthonormée $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sous la forme $X = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i$. D'après le théorème de Pythagore,

$$ \|X\|^2 = \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 $$

d'où

$$ \begin{aligned} \|H_n X\|^2 &= \left\| H_n \left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \right) \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i X_i \right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 {\lambda_i}^2 && \text{(théorème de Pythagore)} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 {\rho_n}^2 && (\text{car } |\lambda_i| = \lambda_i \leqslant \rho_n) \\ \|H_n X\|^2 &\leqslant \|X\|^2 {\rho_n}^2 \end{aligned} $$

Donc pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\quad \|H_n X\| \leqslant \rho_n \|X\|$

Supposons alors ${}^t X\, H_n X = \rho_n \|X\|^2$. Utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la majoration précédente

$$ \rho_n \|X\|^2 = {}^t X\, H_n X \leqslant \|X\| \|H_n X\| \leqslant \rho_n \|X\|^2 $$

Tous les termes sont donc égaux et, par le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la famille de vecteurs $(X, H_n X)$ est liée. Si $X = 0$, alors $X \in \mathscr{V}$. Sinon il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $H_n X = \lambda X$. L'hypothèse ${}^t X\, H_n X = \rho \|X\|^2$ donne alors $\lambda^2 = {\rho_n}^2$, car $X \neq 0$ et donc $\lambda = \rho_n$ puisque les valeurs propres de H_n sont positives. Par conséquent $X \in \mathscr{V}$ également. On a montré

$$ \boxed{X \in \mathscr{V} \text{ si et seulement si } {}^t X H_n X = \rho_n \|X\|^2} $$

3 D'après l'inégalité triangulaire, pour tout $t \in [\,0\,;1\,]$,

$$ \left| \widetilde{X_0}(t) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |x_k|\, t^k = \widetilde{|X_0|}(t) $$

En reprenant l'expression obtenue à la question 1 et par croissance de l'intégrale et de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, il vient

$$ \begin{aligned} {}^t X_0\, H_n X_0 &= \int_0^1 \widetilde{X_0}(t)^2 \,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^1 \widetilde{|X_0|}(t)^2 \,\mathrm{d}t \end{aligned} $$

d'où

$$ \boxed{{}^t X_0\, H_n X_0 \leqslant {}^t\, |X_0|\, H_n\, |X_0|} $$