# Mines Maths 1 MP 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Quentin Guilmant (ENS Lyon) ; il a été relu par Philippe Bouafia (professeur agrégé en école d'ingénieurs) et Florian Metzger (docteur en mathématiques).

Ce sujet d'analyse a pour objectif de déterminer les équivalents en $+\infty$ d'une certaine famille de fonctions développables en série entière avec un rayon de convergence infini. L'une d'entre elles peut être reliée à une solution particulière de l'équation d'Airy, c'est-à-dire l'équation différentielle $x'' = tx$.

- La première partie étudie la famille des fonctions $\mathrm{S}_{r,p}$ définies comme des sommes de séries entières par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}_{r,p}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(pn)^r}{(pn)!}\right) t^{pn}$$

  Il s'agit d'un travail préliminaire pour trouver un équivalent en l'infini à toutes ces fonctions. Pour cela, on montre que, si $r > 0$, déterminer un équivalent uniquement pour les fonctions définies avec $p = 1$ suffit à en trouver un pour toutes les autres.

- La deuxième partie est composée de deux sous-parties. La première s'intéresse aux espérances de variables aléatoires bien choisies afin de conclure à un équivalent pour les $(\mathrm{S}_{r,1})_{r>0}$. Cela permet donc d'en obtenir un pour tous les $(\mathrm{S}_{r,p})_{p\in\mathbb{N}^*,r>0}$. La deuxième s'attelle à ramener tous les autres cas à celui-ci par l'utilisation du lemme de comparaison asymptotique des séries entières, qui est admis. Ce lemme permet de dire que les sommes de deux séries entières de rayon de convergence $+\infty$ sont équivalentes au bord de leur domaine de définition, c'est-à-dire en $+\infty$, si leurs termes généraux sont équivalents et s'ils ne changent pas de signe.

- Enfin, la troisième et dernière partie propose de trouver une solution sous forme de série entière à l'équation d'Airy. On remarquera qu'une telle solution ressemble à une des fonctions étudiées jusque-là, $\mathrm{S}_{-1/6,2}$. On peut alors conclure à un équivalent pour la solution de l'équation d'Airy.

Dans cette épreuve, la maîtrise des cours sur les équivalents, la formule de Stirling, les séries entières, les variables aléatoires, l'espérance et les équations différentielles linéaires est essentielle. Tout l'enjeu est en effet de produire des calculs techniques et des estimations précises. Plus précisément, le sujet traite principalement de séries entières mais propose, afin de déterminer les équivalents, de passer par l'étude de variables aléatoires bien choisies et de leurs espérances. Le sujet tente clairement d'évaluer les candidats sur la maîtrise des équivalents et des méthodes usuelles de décomposition de variables aléatoires en plusieurs autres. Même si la dernière partie traite des équations différentielles, peu de connaissances sont demandées sur celles-ci et le sujet se concentre vraiment sur les deux thèmes mentionnés ci-dessus.

# Indications

## Partie A

1 Penser à la règle de d'Alembert.

2 Étudier le quotient $u_n(x)/u_{n-1}(x)$.

3 Penser à des développements limités.

4 Ici la somme est composée $n+1$ termes, en particulier un nombre fini. Il suffit, pour conclure, d'écrire la définition de suites équivalentes.

5 Utiliser la question 4 pour tout entier naturel $n$ non nul, puis utiliser la définition de la partie entière pour conclure.

6 On pourra exprimer $(z-1)\mathrm{S}_{r,1}(zx)$ sous la forme de la somme d'une série entière en $z$ et remarquer que la série $\sum (u_{n-1}(x) - u_n(x))$ converge vers 0. Pour conclure, ajouter ou soustraire judicieusement cette dernière.

7 Se rappeler la valeur d'une somme de racines de l'unité.

## Partie B

8 Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

10 Exprimer simplement l'espérance de la variable aléatoire positive $\mathrm{Y}_{\mathrm{N},x}$ pour prouver que la série converge et l'exprimer à l'aide d'une probabilité sur la variable $\mathrm{X}_x$.

11 Penser à une certaine famille de polynômes de degrés échelonnés suggérée par l'expression de $\mathrm{Y}_{\mathrm{N},x}$.

12 Exprimer ${\mathrm{Z}_x}^r$ à l'aide de trois autres variables aléatoires dont $\mathrm{A}_x$ et $\mathrm{B}_x$.

13 Écrire la définition d'équivalent.

## Partie C

14 Faire un développement asymptotique de $v_n - v_{n-1}$ et le comparer au terme général d'une série convergente de référence. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis que $(\mathrm{e}^{\,v_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge elle aussi.

16 Procéder par identification pour obtenir des formules de récurrence liant les quantités $a_n$ et $a_{n+3}$. Conclure en résolvant la récurrence.

17 Penser à la formule de Stirling.

18 Remarquer que, si $f(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} g(u)$, alors on a aussi $f(u^3) \underset{u\to+\infty}{\sim} g(u^3)$.

**1** Pour justifier que la série entière $\sum_{n\geqslant 1} ((pn)^r/(pn)!)\, z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$, on peut utiliser la règle de d'Alembert. Notons pour $n$ un entier naturel non nul :

$$a_n = \frac{(pn)^r}{(pn)!}$$

Par suite,
$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{n+1}{n}\right|^r \left|\frac{1}{(pn+1)\cdots(p(n+1))}\right| \\ &\leqslant \left(\frac{n+1}{n}\right)^r \frac{1}{pn+1} \qquad \text{car } p>0\end{aligned}$$

Finalement,
$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$$

La règle de d'Alembert indique alors que le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$. Notons $f$ la somme de la série. La quantité $f(z)$ est donc définie pour tout nombre complexe $z$. En particulier, pour tout complexe $p$,

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad f(z^p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{pn} = \mathrm{S}_{r,p}(z)$$

Ainsi
$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{pn} \text{ a pour rayon de convergence } +\infty.}$$

## A. Équivalence entre $(\mathrm{H}_{r,p})$ et $(\mathrm{H}_{r,1})$ lorsque $r > 0$

**2** Soient $x > 0$ et $r > 0$ des réels. La fonction $\varphi_x$ définie sur $[\,1\,;+\infty\,[$ par

$$\forall t \in [\,1\,;+\infty\,[ \qquad \varphi_x(t) = t^{1-r}(t-1)^r - x$$

est continue sur $[\,1\,;+\infty\,[$ et dérivable sur $]\,1\,;+\infty\,[$.

> Elle est dérivable sur $[\,1\,;+\infty\,[$ dès lors que $r \geqslant 1$.

Étudions son signe, ses zéros et ses variations. Avec la formule du cours, on calcule

$$\forall t \in \,]\,1\,;+\infty\,[ \qquad {\varphi_x}'(t) = (1-r)\left(\frac{t-1}{t}\right)^r + r\left(\frac{t-1}{t}\right)^{r-1}$$

En particulier,
$$\forall t \in \,]\,1\,;+\infty\,[ \qquad {\varphi_x}'(t) > 0$$

ce qui signifie que la fonction $\varphi_x(t)$ est strictement croissante sur $]\,1\,;+\infty\,[$, et par continuité en 1, elle est strictement croissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$. De plus,

$$\varphi_x(1) = -x < 0$$

Enfin, comme $x$ est fixé et $t-1 \sim t$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$, on a

$$\varphi_x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{1-r}(t-1)^r \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{1-r}t^r \underset{t\to+\infty}{\sim} t$$

Il s'ensuit que
$$\lim_{t\to+\infty} \varphi_x(t) = +\infty$$

Le théorème des valeurs intermédiaires assure donc l'existence d'un réel $t_x \in \left]1\,;+\infty\right[$ tel que $\varphi_x(t_x) = 0$ et permet donc de construire le tableau de variations et de signes suivant :

| | $1$ | $t_x$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| ${\varphi_x}'$ | | $+$ | |
| $\varphi_x$ | $-x$ ↗ | $0$ ↗ | $+\infty$ |
| $\varphi_x$ | $-$ | $0$ | $+$ |

Par croissance stricte de $\varphi_x$, on conclut

$$\boxed{\text{Il existe un unique } t_x \in \left]1\,;+\infty\right[ \text{ tel que } \varphi_x(t_x) = 0.}$$

Remarquons que, pour $n \geqslant 1$ un entier, $u_n(x) \neq 0$. Ainsi, pour $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned} \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^r \frac{1}{n} x \\ &= \frac{x}{n^{1-r}(n-1)^r} \\ \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} &= \frac{x}{\varphi_x(n) + x} \end{aligned}$$

En utilisant l'étude précédente du signe de $\varphi_x$, il s'ensuit l'équivalence

$$\forall n \geqslant 1 \qquad u_n \geqslant u_{n-1} \iff \varphi_x(n) \leqslant 0 \iff n \leqslant t_x \iff n \leqslant \lfloor t_x \rfloor$$

La dernière équivalence provenant du fait que $n$ est un entier. Ainsi

$$\boxed{\text{La suite } (u_n(x))_{0 \leqslant n \leqslant \lfloor t_x \rfloor} \text{ est croissante et la suite } (u_n(x))_{n \geqslant \lfloor t_x \rfloor} \text{ est décroissante.}}$$

**3** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Remarquons que, pour $x \geqslant 1 - \alpha$, la quantité $\varphi_x(x+\alpha)$ a un sens. On peut donc bien en étudier la limite en $+\infty$. Déterminons-la à l'aide d'un développement limité. Plus précisément, nous utilisons

$$(1+u)^r = 1 + ru + \underset{u \to 0}{\mathrm{o}}(u)$$

Ainsi,
$$\begin{aligned} \varphi_x(x+\alpha) &= (x+\alpha)^{1-r}(x+\alpha-1)^r - x \\ &= (x+\alpha)\left(1 - \frac{1}{x+\alpha}\right)^r - x \\ &= (x+\alpha)\left(1 - \frac{r}{x+\alpha} + \underset{x \to +\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x+\alpha}\right)\right) - x \\ &= x + \alpha - r + \underset{x \to +\infty}{\mathrm{o}}(1) - x \\ \varphi_x(x+\alpha) &= \alpha - r + \underset{x \to +\infty}{\mathrm{o}}(1) \end{aligned}$$

Par conséquent,
$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \varphi_x(x+\alpha) = \alpha - r}$$