X/ENS Physique B PC 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Louis Salkin (professeur en CPGE) ; il a été relu par Raphaël Galicher (maître de conférences à l'université) et Tom Morel (professeur en CPGE).

Ce problème s'intéresse à la dynamique de lignes de tourbillon dans les fluides parfaits. L'analogie forte entre les écoulements tourbillonnaires et la magnétostatique en constitue le fil directeur. Profitons-en pour rappeler que la formulation locale de la dynamique des fluides s'est considérablement développée au cours du XIXe siècle, parallèlement à la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell.

- Le problème débute par quelques questions préliminaires permettant de mettre en lumière les analogies entre champ de vitesse et champ magnétostatique.
- La première partie étudie le mouvement de lignes de vorticité induit par le champ de vitesse dans le fluide. Après avoir montré qu'une ligne droite ne se déplace pas sous l'effet du champ de vitesse qu'elle engendre, on traite le cas de deux lignes, puis d'une ligne située à proximité d'une paroi rigide.
- La deuxième partie est consacrée à une distribution annulaire de vorticité. Le mouvement d'un anneau de vorticité est analysé puis comparé à l'expérience. Une approximation dipolaire de son champ de vitesse permet à nouveau d'établir un rapprochement avec la magnétostatique. On considère ensuite la situation plus complexe de deux anneaux en interaction.
- Dans la troisième partie, on s'intéresse aux faibles déformations d'une ligne de vorticité. On établit les conditions de propagation d'une onde transverse au sein de la ligne, ainsi que ses caractéristiques : relation de dispersion, polarisation.
- Enfin, la quatrième partie étudie les déformations couplées de deux lignes de vorticité, comme celles observées sur le sillage d'un avion. Contrairement au cas d'une ligne unique, les déformations peuvent, sous certaines conditions, s'amplifier dans le temps et faire émerger des motifs régulièrement espacés ; la longueur d'onde se développant le plus vite est calculée, puis comparée à des photographies.

Les différentes parties, de difficulté croissante, ne sont pas totalement indépendantes et peu de résultats intermédiaires sont fournis. Néanmoins, ce sujet est bien construit et suffisamment guidé pour permettre de ne pas rester bloqué. Travailler ce sujet donne l'occasion de revoir en profondeur les outils du cours de magnétostatique.

Indications

5 Invoquer l'invariance par translation selon (Oz) et la symétrie par rapport au plan $(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_z})$, avec M le point où on recherche la vitesse $\overrightarrow{u}$.

6 En vertu du théorème de Stokes,

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{u} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \iint_{S} \overrightarrow{\omega} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

Distinguer ensuite les cas $r \leqslant a$ et $r > a$ dans le calcul de la « vorticité enlacée ».

7 Exploiter le caractère orthoradial du champ de vitesse et l'invariance par rotation de la distribution de vorticité donnée.

9 Le fluide étant supposé parfait, seule la composante normale de sa vitesse est tenue de s'annuler au niveau de la paroi.

10 Pour un point $M(x, y = 0, z)$, montrer que le plan $(M, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z})$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de vorticité.

11 Utiliser l'invariance par translation selon (Ox) et la symétrie par rapport au plan $(M, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$, avec M un point appartenant à l'anneau.

12 Utiliser le résultat de la question 3 pour trouver la dimension de Γ.

13 Dans ce régime, la vitesse s'identifie à $\Delta R/\Delta t$; utiliser ensuite le résultat de la question 10.

14 Utiliser les résultats des questions 12 et 13.

19 Le signe de $\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}t$ permet de prédire l'éloignement (signe positif) ou le rapprochement (signe négatif) des anneaux.

22 Injecter les expressions des équations (7) et (8) dans l'équation (6).

23 Passer le jeu d'équations différentielles en notation complexe et injecter les solutions proposées par l'énoncé. Les ondes sont dispersives si la vitesse de phase $v_\varphi = \omega/k$ dépend de ω.

24 Déterminer la relation simple existant entre les amplitudes complexes des perturbations selon $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$; en déduire la polarisation de l'onde.

25 Utiliser le résultat de la question 23.

27 Utiliser le résultat de la question 8.

29 La question 8 peut s'avérer utile pour interpréter le sens physique du changement de variable $Z(x, t) \to \zeta(x, t)$.

30 Si $\omega^2 < 0$, la pulsation est un nombre imaginaire pur.

35 Interpréter, comme à la question 24, la relation entre les amplitudes complexes selon $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$. Il faut distinguer les cas $\lambda < \lambda_c$ et $\lambda > \lambda_c$. Se rappeler également que le profil de la ligne 2 s'obtient par réflexion du profil de la ligne 1 par rapport au plan d'équation $y = 0$.

Dynamique de lignes de tourbillon dans les fluides parfaits

1 Dans le cas statique, l'équation locale de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{B}} = \mu_0\, \overrightarrow{\jmath}}$$

Par identification avec l'équation (1) donnée dans l'énoncé,

> Le champ magnétostatique $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ joue un rôle analogue au champ de vitesse $\overrightarrow{u}$.

2 Le champ $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ satisfait également l'équation locale de Maxwell-Thomson

$$\boxed{\mathrm{div}\ \overrightarrow{\mathrm{B}} = 0}$$

Le champ magnétique étant l'analogue du champ de vitesse, l'équation correspondante en dynamique des fluides s'écrit

$$\boxed{\mathrm{div}\ \overrightarrow{u} = 0}$$

Cette équation locale est vérifiée pour un écoulement incompressible. Or, l'énoncé suppose le fluide incompressible.

> Le champ de vitesse $\overrightarrow{u}$ vérifie effectivement cette équation locale.

3 Le théorème d'Ampère stipule que la circulation du champ magnétostatique sur un contour fermé $\mathcal{C}$ est égale à la perméabilité magnétique du vide multipliée par le courant enlacé par le contour $\mathcal{C}$:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{\mathrm{B}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \mu_0 \mathrm{I}}$$

L'énoncé précise que $\mu_0\mathrm{I}$ a pour analogue la circulation Γ de la ligne de vorticité. De fait, le théorème d'Ampère transposé dans la situation étudiée s'écrit, pour un contour fermé $\mathcal{C}$,

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{u} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \Gamma}$$

4 En magnétostatique, un plan de symétrie (resp. antisymétrie) de la distribution de courants est un plan d'antisymétrie (resp. symétrie) du champ magnétique : le champ $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ est alors orthogonal à ce plan (resp. contenu dans ce plan). Ici, les sources ne sont pas les courants mais la vorticité. Par analogie,

> - Si $\overrightarrow{x}$ appartient à un plan de symétrie de la distribution de vorticité, $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{x})$ est orthogonal à ce plan.
> - Si $\overrightarrow{x}$ appartient à un plan d'antisymétrie de la distribution de vorticité, $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{x})$ est contenu dans ce plan.

5 Cherchons à déterminer le champ de vitesse $\overrightarrow{u}$ au point $\mathrm{M}(r, \theta, z)$.

- Symétries : le plan $(\mathrm{M}, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_z})$ est un plan de symétrie de la distribution de vorticité. D'après la question précédente, $\overrightarrow{u}$ est porté par le vecteur $\overrightarrow{e_\theta}$.

> On peut aussi noter que le plan $(\mathrm{M}, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de vorticité, et en déduire que $\overrightarrow{u}$ appartient à ce plan. Cette information est néanmoins insuffisante pour conclure sur la direction du champ de vitesse.

- Invariances : la distribution de vorticité est invariante par rotation selon θ. En supposant la ligne de vorticité infinie selon $(\mathrm{O}z)$, cette dernière est également invariante par translation selon z. Par conséquent, u ne dépend que de r.

Le champ de vitesse est donc de la forme $\overrightarrow{u} = u(r)\overrightarrow{e_\theta}$. Prenons pour contour fermé un cercle de rayon r passant par M et orienté dans le sens direct, tout comme le contour $\mathcal{C}_1$ représenté sur la figure 1 de l'énoncé. Il vient alors

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{u} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \int_0^{2\pi} u(r)\, r\, \mathrm{d}\theta = 2\pi\, r\, u(r)$$

Puisque ce contour enlace la circulation Γ comptée positivement,

$$2\pi\, r\, u(r) = \Gamma$$

soit finalement
$$\boxed{\overrightarrow{u} = \frac{\Gamma}{2\pi r}\, \overrightarrow{e_\theta}}$$

> Ce problème est formellement analogue au calcul du champ magnétostatique créé par un fil infini parcouru par un courant d'intensité I.

6 La distribution de vorticité étudiée possède les mêmes symétries et invariances que celle de la question 5. Par voie de conséquence, le champ de vitesse en $\mathrm{M}(r, \theta, z)$ est encore de la forme $\overrightarrow{u} = u(r)\, \overrightarrow{e_\theta}$. En choisissant à nouveau un contour circulaire de rayon r passant par M et orienté dans le sens direct,

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{u} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = 2\pi\, r\, u(r)$$

Utilisons alors le théorème de Stokes pour établir le lien entre circulation et vecteur vorticité :

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{u} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \iint_{\mathrm{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{u} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = \iint_{\mathrm{S}} \overrightarrow{\omega} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}}$$

avec S la surface s'appuyant sur le contour circulaire $\mathcal{C}$. Deux cas se présentent alors :

- Si $r > a$, $$\iint_{\mathrm{S}} \overrightarrow{\omega} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \Omega\, \mathrm{d}r\, r\, \mathrm{d}\theta = \Omega\, \pi\, a^2$$
- Si $r \leqslant a$, la borne radiale supérieure devient r :

$$\iint_{\mathrm{S}} \overrightarrow{\omega} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = \int_0^r \int_0^{2\pi} \Omega\, \mathrm{d}r\, r\, \mathrm{d}\theta = \Omega\, \pi\, r^2$$

En définitive,
$$\boxed{\overrightarrow{u} = \begin{cases} \dfrac{\Omega r}{2}\, \overrightarrow{e_\theta} & \text{si } r \leqslant a \\[2ex] \dfrac{\Omega\, a^2}{2r}\, \overrightarrow{e_\theta} & \text{si } r > a \end{cases}}$$