CCP Physique PC 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (professeur en CPGE) ; il a été relu par Jérôme Lambert (enseignant-chercheur à l'université) et Louis Salkin (professeur en CPGE).

Ce sujet porte sur les procédés de transmission d'un signal. Il est composé de deux parties indépendantes.

- La première partie, très classique, traite du câble coaxial. Dans un premier temps, on établit les équations électriques d'un câble coaxial parfait sans pertes. Puis on étudie l'atténuation d'une onde qui se propage dans un câble avec une résistance électrique. Cette partie s'appuie essentiellement sur des notions d'électrocinétique et de propagation d'ondes.
- La seconde partie, tout aussi classique, s'intéresse à la fibre optique. On étudie les propriétés d'une fibre optique à saut d'indice puis celles d'une fibre à gradient d'indice. Enfin, on caractérise différentes pertes lors de la propagation d'une onde dans une fibre optique. Cette partie repose sur les cours d'optique géométrique, de mécanique et d'électromagnétisme.

Ce problème bien construit est représentatif des épreuves posées au concours CCP. Ses deux parties sont des incontournables qu'il faut avoir vus au moins une fois pendant la prépa. Elles donnent en outre l'occasion de réviser une bonne partie des programmes de première et de deuxième année.

Indications

2 Écrire les lois des nœuds et des mailles.

6 En $x = d$, la loi d'Ohm s'écrit $\underline{u}(d,t) = \underline{Z}\,\underline{i}(d,t)$.

7 La puissance transmise est optimale lorsque toute l'onde est absorbée en sortie de la fibre.

17 Appliquer la loi de Descartes relative à la réfraction au niveau de l'interface gaine/cœur puis air/cœur.

21 Les premiers rayons sortant de la fibre ont été émis les premiers et mettent un temps T_1 à traverser la fibre. Les derniers rayons à sortir ont été émis le plus tard et mettent un temps T_2.

24 Le gradient est orienté vers les indices optiques les plus grands.

25 L'angle φ est pris par rapport au dioptre. Faire un schéma au point M et faire apparaître dx et dy, puis exprimer $\tan\varphi$.

26 Les conditions aux limites sont

$$y(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x=0) = \tan\theta_0$$

27 Dans une fibre à gradient d'indice, il n'y a plus de réflexion totale si $y_{\text{max}} > r_{\text{c}}$.

29 Les lois sont valables dans le cadre de l'approximation géométrique.

34 Chaque impureté diffuse une fraction $\mathrm{P}\sigma/\mathrm{S}$ de la puissance incidente.

36 Utiliser l'expression de l'atténuation linéique A pour déterminer la valeur numérique de $n_{\text{v}}\sigma$.

45 Écrire la continuité des champs électrique et magnétique totaux en $x = 0$. Il y a un changement de phase lors de la transmission si le rapport $\underline{\mathrm{E}}_{02}/\underline{\mathrm{E}}_{01}$ est complexe.

46 Le facteur de transmission en puissance est $\mathrm{T} = \langle \mathrm{R}_2 \rangle \,/\, \langle \mathrm{R}_1 \rangle$.

47 Il y a un facteur de transmission en entrée et en sortie de la fibre.

48 Relier l'angle d'incidence limite au rayon de courbure r en travaillant dans un triangle rectangle dont l'hypoténuse est $r + r_{\text{c}} + r_{\text{g}}$.

Procédés physiques de transmission d'un signal

1 On doit **brancher un fil ou une impédance au bout du câble coaxial** pour que le courant puisse retourner au générateur via la gaine.

2 La loi des nœuds s'écrit

$$\begin{aligned} i(x,t) &= i(x+\mathrm{d}x,t) + i_{\mathrm{dC}}(x+\mathrm{d}x,t) \\ &= i(x+\mathrm{d}x,t) + \mathrm{dC}\,\frac{\partial u}{\partial t}(x+\mathrm{d}x,t) \\ i(x,t) &= i(x+\mathrm{d}x,t) + \mathrm{dC}\,\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \end{aligned}$$

De même, la loi des mailles donne

$$u(x,t) = u_{\mathrm{dL}}(x,t) + u(x+\mathrm{d}x,t) = \mathrm{dL}\,\frac{\partial i}{\partial t}(x,t) + u(x+\mathrm{d}x,t)$$

Développons ces deux équations à l'ordre le plus bas non nul en $\mathrm{d}x$, avec $\mathrm{dC} = \Gamma\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{dL} = \Lambda\,\mathrm{d}x$.

$$\boxed{\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma\,\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda\,\frac{\partial i}{\partial t}}$$

3 Dérivons la première équation par rapport à x et la deuxième par rapport à t

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -\Gamma\,\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -\Lambda\,\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

Avec $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= -\Gamma\,\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \\ &= \Gamma\,\Lambda\,\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \end{aligned}$$

De la même façon, on obtient une équation équivalente pour la tension

$$\boxed{\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \Gamma\,\Lambda\,\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Gamma\,\Lambda\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

Ces deux équations sont bien des équations de d'Alembert. On définit la vitesse de propagation v telle que $v^2 = 1/(\Gamma\Lambda)$, c'est-à-dire

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\,\Lambda}}}$$

D'après l'expression de la tension aux bornes d'une bobine,

$$[\Lambda] = \left[\frac{u_{\mathrm{dL}}}{\mathrm{d}x\,\partial i_{\mathrm{dL}}/\partial t}\right] = \frac{\mathrm{V.T}}{\mathrm{L.I}}$$

où V est la dimension d'une tension. De même, utilisons la relation de l'intensité qui traverse un condensateur,

$$[\Gamma] = \left[\frac{i_{\mathrm{dC}}}{\mathrm{d}x\,\partial u_{\mathrm{dC}}/\partial t}\right] = \frac{\mathrm{I.T}}{\mathrm{L.V}}$$

Par conséquent, $[1/(\Gamma\Lambda)] = \mathrm{L}^2.\mathrm{T}^{-2}$.

$$\boxed{\text{L'expression de } v \text{ est bien homogène à une vitesse.}}$$

4 À partir de l'expression de $\underline{u}$,

$$\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = -\omega^2\, \underline{u} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2} = -k^2\, \underline{u}$$

D'après la question précédente, l'équation de d'Alembert est

$$\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2}$$

En notation complexe, $\underline{u}$ est solution de cette équation si

$$\boxed{k = \pm\,\frac{\omega}{v}}$$

L'exponentielle d'argument $\omega t - kx$ (respectivement $\omega t + kx$) correspond à un terme qui se propage vers les **x croissants** (respectivement vers les **x décroissants**).

5 Prenons une des deux relations obtenues à la question 2,

$$\frac{\partial \underline{i}}{\partial x} = -\Gamma\,\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}$$

Utilisons par exemple le terme qui se propage vers les x croissants,

$$\underline{u}^+(x,t) = u_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx)} \qquad \text{et} \qquad \underline{i}^+(x,t) = i_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx)}$$

Il vient

$$-\mathrm{j}k\,i_0 = -\Gamma\,\mathrm{j}\omega\,u_0$$

Or,

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{u_0}{i_0}\\
&= \frac{k}{\Gamma\,\omega}\\
&= \frac{1}{\Gamma\,v} && \text{avec } k = \frac{\omega}{v}\\
&= \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} && \text{d'après la question 3}\\
&\boxed{\rho = \mathrm{Z_c}} && \text{avec } \mathrm{Z_c} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}
\end{aligned}$$

La grandeur ρ est **en Ohm**.

> On aurait trouvé la même expression avec le terme qui se propage vers les x décroissants.

6 En $x = d$, la loi d'Ohm de l'impédance $\underline{\mathrm{Z}}$ donne

$$\underline{u}(d,t) = \underline{\mathrm{Z}}\,\underline{i}(d,t)$$

Avec les expressions de $\underline{u}$ et $\underline{i}$ en $x = d$ et après factorisation par $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, on arrive à

$$\rho\left(i_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kd} - i_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}kd}\right) = \underline{\mathrm{Z}}\left(i_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kd} + i_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}kd}\right)$$

d'où

$$i_1\left(\underline{\mathrm{Z}} + \rho\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}kd} = i_0\left(\rho - \underline{\mathrm{Z}}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kd}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{i_1 = i_0\,\frac{\rho - \underline{\mathrm{Z}}}{\rho + \underline{\mathrm{Z}}}\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}kd}}$$

7 De la même façon,