Mines Maths 2 PSI 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Antoine Sihrener (professeur en CPGE) ; il a été relu par Tristan Poullaouec (professeur en CPGE) et Céline Chevalier (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet a pour but l'étude des endomorphismes échangeurs u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie, c'est-à-dire vérifiant la propriété :

« Il existe F et G supplémentaires dans E tels que $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{G}$ et $u(\mathrm{G}) \subset \mathrm{F}$. »

Plus précisément, si u est un endomorphisme de E, ce problème propose de montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :

(C1) u est échangeur.

(C2) u est somme de deux endomorphismes de E de carré nul.

(C3) u est semblable à $-u$.

- La première partie donne une condition suffisante pour qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 2 soit échangeur. Les questions sont abordables, mais l'application à des endomorphismes de notions utilisées en général pour les matrices a pu déconcerter certains candidats.
- Dans la deuxième partie, on montre que la condition **(C1)** implique les deux autres. Cette partie ne pose pas de difficulté particulière.
- La troisième partie consiste à montrer que la condition **(C2)** implique la condition **(C1)** dans le cas où u est un automorphisme. Elle n'est constituée que de questions très classiques. De plus, cette partie et la précédente peuvent être traitées dès la première année de classe préparatoire.
- La quatrième partie étudie la suite des noyaux itérés et celle des images itérées. Les premières questions sont elles aussi abordables en première année, tandis que les deux dernières nécessitent des raisonnements fins. Les résultats de cette partie sont indispensables pour traiter les suivantes.
- La cinquième partie permet de montrer que la condition **(C2)** implique la condition **(C1)** dans le cas général. Elle est assez courte, mais la dernière question nécessite une bonne compréhension de la notion de somme directe.
- La dernière partie montre que la condition **(C3)** entraîne la condition **(C1)**, ce qui clôt l'équivalence des trois propriétés. Elle aussi nécessite une bonne maîtrise des sommes directes, et les raisonnements sont assez élaborés.

En conclusion, c'est un sujet d'algèbre linéaire qui couvre l'ensemble du programme de première année et qui utilise les notions fondamentales du programme de deuxième année (ce qui ne veut pas dire que les questions où elles sont utilisées soient élémentaires). Il y a de nombreuses questions, de difficultés variées. Les résultats étant toujours donnés, quitte à les admettre on n'était nullement handicapé pour les questions suivantes. Ce sujet pourra être utilisé avec profit après le cours de réduction de seconde année pour vérifier que les notions de base ainsi que le cours de première année sont bien assimilés.

Indications

1 Utiliser le fait que $\mathrm{Tr}\,(a \circ b) = \mathrm{Tr}\,(b \circ a)$. Attention, on travaille avec des endomorphismes et non des matrices !

2 Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.

3 Poser $\mathrm{D} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{X} + \mathrm{Y})$ où X et Y sont deux vecteurs propres pour les deux valeurs propres distinctes.

5 Calculer D^2.

6 Donner l'image des f_i et g_i dans la base $\mathbf{B}$ et se souvenir que u est échangeur.

7 Utiliser les questions 4 et 5.

8 Montrer que $\mathrm{Im}\ f$ est inclus dans $\mathrm{Ker}\ f$ puis appliquer le théorème du rang.

9 Regarder l'intersection des noyaux, puis minorer la dimension de leur somme grâce au résultat de la question 8. Appliquer ensuite le théorème du rang.

10 Montrer que u envoie $\mathrm{Ker}\ a$ sur $\mathrm{Ker}\ b$ et inversement en utilisant l'égalité des noyaux et images.

12 Considérer la suite des dimensions des noyaux et se souvenir qu'une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

13 Montrer que l'intersection est nulle, puis appliquer le théorème du rang comme à la question 9. Montrer ensuite que v commute avec f afin d'établir les stabilités.

14 Raisonner par l'absurde : considérer un x vecteur propre pour l'endomorphisme induit par f et montrer qu'il appartient à la fois à $\mathrm{E}_\lambda^c(f)$ et à $\mathrm{Im}\ (v^p)$. Ensuite, se souvenir qu'une composée d'applications injectives est injective. Enfin, prendre un vecteur propre x pour une autre valeur propre μ et calculer $v^p(x)$.

15 Appliquer le théorème de Cayley-Hamilton à la restriction de f à $\mathrm{Im}\ v^p$ après avoir montré qu'elle n'admettait qu'une seule valeur propre.

16 Attention, a et b ne commutent pas.

17 En posant $p = 2k$, écrire u^p comme une composée d'endomorphismes qui commutent avec a et b.

18 À l'aide de la question 13, exprimer E comme somme directe de deux espaces. Utiliser le résultat admis pour prouver que l'endomorphisme (nilpotent) induit par u sur le premier y est échangeur. Sur le deuxième, montrer à l'aide de la question 14 que l'endomorphisme induit par u est injectif, puis échangeur d'après les questions 10 et 17. « Mélanger » ensuite les espaces obtenus pour prouver que u est échangeur.

19 Exprimer u en fonction de u^{-1} et φ.

20 Montrer que φ^2 admet une valeur propre λ puis poser $f = \varphi^2$ et $v = f - \lambda \mathrm{I}_\mathrm{E}$. Appliquer les questions 12, 13 et 14.

21 Utiliser la question 15.

22 Montrer que E est somme directe d'espaces vectoriels sur lesquels u est indécomposable (en raisonnant par récurrence sur la dimension), puis « mélanger » les espaces vectoriels en raisonnant comme dans la question 18.

Partie A

$\boxed{1}$ Supposons que u vérifie la condition **(C3)**. Par définition de la similitude, il existe un automorphisme φ de E tel que $u = \varphi \circ (-u) \circ \varphi^{-1}$. Or, si a et b sont deux endomorphismes de E, alors $\operatorname{Tr}(a \circ b) = \operatorname{Tr}(b \circ a)$, d'où

$$\operatorname{Tr}(u) = \operatorname{Tr}\left(\varphi \circ (-u) \circ \varphi^{-1}\right) = \operatorname{Tr}\left(-u \circ \varphi^{-1} \circ \varphi\right) = \operatorname{Tr}(-u \circ \mathrm{id}) = \operatorname{Tr}(-u)$$

Par linéarité de la trace, il vient finalement $\operatorname{Tr}(u) = -\operatorname{Tr}(u)$ c'est-à-dire

$$\boxed{\text{Si } u \text{ vérifie la condition } \textbf{(C3)}, \text{ alors } \operatorname{Tr}(u) = 0.}$$

$\boxed{2}$ Le polynôme caractéristique de u est égal à $\chi_u = \mathrm{X}^2 - \operatorname{Tr}(u)\mathrm{X} + \det(u) = \mathrm{X}^2 - \delta^2$ en utilisant les valeurs de $\operatorname{Tr}(u)$ et $\det(u)$ données par l'énoncé. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_u(u) = 0$ d'où

$$\boxed{u^2 = \delta^2 \mathrm{I}_{\mathrm{E}}}$$

Le polynôme caractéristique $\chi_u = (\mathrm{X} - \delta)(\mathrm{X} + \delta)$ admettant deux racines distinctes (car $\delta^2 \neq 0$) en dimension 2, u est diagonalisable et les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux multiplicités des racines correspondantes de χ_u.

$$\boxed{\text{Le spectre de } u \text{ est égal à } \{-\delta, \delta\} \text{ et les sous-espaces propres sont de dimension 1.}}$$

$\boxed{3}$ Soient X et Y deux vecteurs propres de u pour les valeurs propres respectives δ et $-\delta$. D'après la question précédente, les valeurs propres étant distinctes, ils forment une base de E. Posons $\mathrm{D} = \operatorname{Vect}(\mathrm{X} + \mathrm{Y})$. Par linéarité de u,

$$u(\mathrm{X} + \mathrm{Y}) = u(\mathrm{X}) + u(\mathrm{Y}) = \delta\mathrm{X} - \delta\mathrm{Y} = \delta(\mathrm{X} - \mathrm{Y})$$

Comme δ est non nul, les coordonnées des vecteurs $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ et $\delta(\mathrm{X} - \mathrm{Y})$ dans la base (X, Y), à savoir $(1, 1)$ et $(\delta, -\delta)$, ne sont pas proportionnelles, si bien que $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ et $\delta(\mathrm{X} - \mathrm{Y})$ sont linéairement indépendants. Ainsi, $u(\mathrm{X} + \mathrm{Y})$ n'appartient pas à D. En d'autres termes,

$$\boxed{\text{En posant } \mathrm{D} = \operatorname{Vect}(\mathrm{X} + \mathrm{Y}), \text{ alors D est une droite vectorielle et } u(\mathrm{D}) \not\subset \mathrm{D}.}$$

Posons $\mathrm{F} = \mathrm{D}$ et $\mathrm{G} = \operatorname{Vect}(\mathrm{X} - \mathrm{Y})$. D'après ce qui précède, $u(\mathrm{F})$ est inclus dans G et on montre de la même façon que $u(\mathrm{G})$ est inclus dans F. Ils sont de plus supplémentaires car ce sont deux droites vectorielles engendrées par des vecteurs linéairement indépendants en dimension 2. Finalement,

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } u \text{ est échangeur.}}$$

Partie B

4 Notons cette matrice $\mathrm{T_B}$. Par définition d'un produit par blocs,

$$\mathrm{T_B}^2 = \begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{B} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{B} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n + \mathrm{B} \times 0_{p,n} & 0_n \times \mathrm{B} + \mathrm{B} \times 0_p \\ 0_{p,n} & 0_{p,n} \times \mathrm{B} + 0_p \end{pmatrix}$$

Par suite, $$\boxed{\mathrm{T_B}^2 = 0_{n+p}}$$

De la même façon, si l'on pose

$$\mathrm{T_A} = \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ \mathrm{A} & 0_p \end{pmatrix}$$

alors $\mathrm{T_A}^2 = 0_{n+p}$. Le résultat en découle en remarquant que $\mathrm{M} = \mathrm{T_A} + \mathrm{T_B}$.

$$\boxed{\text{M est la somme des deux matrices } \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ \mathrm{A} & 0_p \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{B} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix} \text{ de carré nul.}}$$

5 Comme à la question 4, en effectuant un produit par blocs, il vient

$$\mathrm{D}^2 = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} = \mathrm{I}_{n+p}$$

d'où $$\boxed{\text{La matrice D est inversible et } \mathrm{D}^{-1} = \mathrm{D}.}$$

> On pouvait également remarquer que $\det(\mathrm{D}) = (-1)^p \neq 0$ donc D est inversible. De plus, l'inverse d'une matrice diagonale est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les inverses de ceux de la matrice d'origine, ce qui permet également de conclure.

Toujours en effectuant un produit par blocs, on obtient

$$\boxed{\mathrm{DMD}^{-1} = \begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{B} \\ -\mathrm{A} & 0_p \end{pmatrix} \mathrm{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 0_n & -\mathrm{B} \\ -\mathrm{A} & 0_p \end{pmatrix} = -\mathrm{M}}$$

c'est-à-dire que $$\boxed{\text{La matrice M est semblable à } -\mathrm{M}.}$$

6 Soit $i \in [\![1\,; n]\!]$. Puisque $u(\mathrm{F})$ est inclus dans G, alors $u(f_i) \in \mathrm{G}$ donc il existe $(a_{ij})_{j \in [\![1\,;\,p]\!]} \in \mathbb{C}^p$ tels que

$$u(f_i) = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} g_j$$

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{C})$ de terme général a_{ij}. Par définition de la matrice associée à un endomorphisme dans une base donnée, les n premières colonnes de la matrice associée à u dans la base $\mathscr{B}$ sont ${}^t\begin{pmatrix} 0_n & {}^t\mathrm{A} \end{pmatrix}$. De la même façon, il existe $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ telle que les p colonnes suivantes de la même matrice soient ${}^t\begin{pmatrix} {}^t\mathrm{B} & 0_p \end{pmatrix}$. En d'autres termes,

$$\boxed{\text{Il existe } \mathrm{A} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{C}) \text{ et } \mathrm{B} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C}) \text{ telles que } \mathrm{Mat}_{\mathbf{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{B} \\ \mathrm{A} & 0_p \end{pmatrix}.}$$