e3a Maths 2 PSI 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Loïc Devilliers (ENS Cachan) ; il a été relu par Sophie Rainero (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet propose d'étudier les matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Il est composé de sept parties. Les cinq dernières sont largement indépendantes les unes des autres.

- La partie préliminaire contient quatre questions de cours à traiter rapidement.
- La partie I, la plus longue, fait établir quelques résultats généraux sur les matrices nilpotentes qui pourront être utilisés par la suite.
- La partie II s'intéresse à deux exemples : le premier considère une matrice nilpotente de taille n constituée uniquement de 1 strictement au-dessus de la diagonale et de 0 ailleurs. Le second propose de décrire l'ensemble des matrices nilpotentes de taille 2.
- La partie III a pour but de montrer que l'espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes est l'espace des matrices de trace nulle.
- Dans la partie IV, on démontre qu'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ uniquement constitué de matrices nilpotentes est de dimension au plus $n(n-1)/2$.
- Dans la partie V, on montre que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un fermé d'intérieur vide.
- La partie VI, enfin, considère le cas des matrices qui sont la somme de la matrice identité et d'une matrice nilpotente. On montre que ces matrices admettent un inverse et une racine carrée, qui s'écrivent l'une et l'autre comme un polynôme en la matrice nilpotente.

Outre les questions de cours, ce sujet contient dans les parties I à IV des questions classiques sur les matrices nilpotentes (comme la somme de deux matrices nilpotentes qui commutent) et sur les sous-espaces vectoriels classiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (matrices symétriques, antisymétriques, triangulaires supérieures). Ces thèmes très classiques doivent absolument être maîtrisés quand on arrive aux concours. Les candidats qui s'étaient bien préparés ont pu traiter ces questions en faisant appel à leur mémoire en plus de leur réflexion, et se ménager ainsi du temps pour aborder les parties V et VI, qui étaient plus difficiles.

Indications

Partie I

I-1 Montrer que A n'est pas inversible en considérant son déterminant.

I-2 Montrer que $\mathrm{sp}\,(\mathrm{A}) = \{0\}$ et que $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n$.

I-3 Prouver qu'une matrice diagonalisable et nilpotente est forcément nulle.

I-5 Justifier et utiliser une relation entre $({}^t\mathrm{A})^k$ et ${}^t(\mathrm{A}^k)$ pour $k \in \mathbb{R}$.

I-7 Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.

I-9 On considérera une matrice triangulaire supérieure stricte de rang $n-1$.

I-10.2 On utilisera la formule du binôme de Newton.

I-11 Utiliser le fait que les matrices symétriques réelles sont diagonalisables, puis la question I-3.

I-12.1 Grâce à la question I-10.2, montrer que ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$ est symétrique et nilpotente.

I-12.2 Montrer que si $\mathrm{Tr}\,({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}) = 0$ alors $\mathrm{A} = \mathrm{O}_n$.

Partie II

II-1.2 Montrer que S est symétrique. De plus, $\mathrm{S} = \mathrm{J} - \mathrm{I}_n$ avec J la matrice carrée d'ordre n constituée uniquement de 1. Trouver un polynôme annulateur de S.

II-2.1 Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton. Distinguer les deux cas $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 0$ et $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) \neq 0$.

Partie III

III-3.3 On considérera une combinaison linéaire de ces matrices, puis on récrira cette combinaison dans la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

III-3.4 Déduire de la question précédente que $\dim \mathrm{V} = \dim \mathrm{T}_0$, puis conclure en utilisant la question III-2.

Partie IV

IV-1 On exhibera une base de $\mathcal{T}_1$.

IV-3 Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T}_1 = \{0\}$ puis que $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) + \dim \mathcal{T}_1 = \dim \mathscr{E}$.

IV-4.1 Utiliser la formule de Grassmann.

IV-4.2 Utiliser les questions IV-4.1 et IV-1.

Partie V

V-1 Considérer une suite de matrices nilpotentes. Utiliser la question I-7.

V-3 On appliquera ce qui précède au sous-espace vectoriel T_0.

Partie VI

VI-1 Utiliser l'égalité entre polynômes : $(1 - (-\mathrm{X})^n) = (1+\mathrm{X})\Big(\sum\limits_{k=0}^{n-1} (-\mathrm{X})^k\Big)$.

VI-3 Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ les coefficients du développement en série entière exprimés à la question VI-2. On montrera que $\mathrm{B} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k \alpha^k \mathrm{A}^k$ convient, en effectuant un produit de Cauchy et en utilisant l'unicité du développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^{1/2}$.

Questions de cours

QC1 $\boxed{\text{La dimension de } \mathscr{E} \text{ est } n^2. \text{ Une base de } \mathscr{E} \text{ est } (\mathrm{E}_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}.}$

QC2 Notons que les coefficients de la matrice $\mathrm{E}_{i,j}$ sont donnés par

$$\mathrm{E}_{i,j} = (\delta_{a,i}\delta_{b,j})_{1\leqslant a,b\leqslant n} \text{ où } \delta \text{ est le symbole de Kronecker.}$$

Posons $\mathrm{E} = \mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell}$, et notons $(e_{a,b})_{1\leqslant a,b\leqslant n}$ les coefficients de la matrice E. Considérons $(a,b) \in [\![\, 1\,;n\,]\!]^2$, calculons le coefficient $e_{a,b}$ de la matrice E :

$$e_{a,b} = \sum_{c=1}^{n} \delta_{a,i}\delta_{c,j} \times \delta_{c,k}\delta_{b,\ell} = \delta_{j,k}\delta_{a,i}\delta_{b,\ell}$$

Comme $(\delta_{a,i}\delta_{b,\ell})_{1\leqslant a,b\leqslant n}$ est la famille des coefficients de la matrice $\mathrm{E}_{i,\ell}$, on trouve

$$\boxed{\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell} = \delta_{j,k}\mathrm{E}_{i,\ell}, \text{ en particulier ce produit est nul dès que } j \neq k.}$$

QC3 Soit $\mathbb{K}$ un corps égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$ le polynôme caractéristique de A. Le théorème de Cayley-Hamilton affirme que

$$\boxed{\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = \mathrm{O}_n}$$

QC4 $\boxed{\text{La matrice M est trigonalisable dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \text{ si et seulement si le polynôme caractéristique de M est scindé sur } \mathbb{K}.}$

> D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, tout polynôme de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ est scindé. On en déduit, en particulier, que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

I. Propriétés élémentaires

I-1 La matrice A étant dans $\mathscr{N}$, on considère, dans toute cette partie, p un entier naturel fixé tel que $\mathrm{A}^p = \mathrm{O}_n$.

Montrons que la matrice A n'est pas inversible. Comme $\mathrm{A}^p = \mathrm{O}_n$ et que le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit des déterminants de ces matrices, il vient

$$\det(\mathrm{A})^p = \det(\mathrm{A}^p) = \det(\mathrm{O}_n) = 0$$

d'où $\det \mathrm{A} = 0$. On peut donc en conclure que

$$\boxed{\text{La matrice A n'est pas inversible.}}$$

I-2 Soient $\lambda \in \mathrm{sp}\,(\mathrm{A})$ et x un vecteur propre de A associé à λ : $\mathrm{A}x = \lambda x$. Une récurrence immédiate montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}^k x = \lambda^k x$. En particulier, pour $k = p$, il vient

$$0 = \mathrm{A}^p x = \lambda^p x$$

Comme x n'est pas nul, on en déduit que $\lambda^p = 0$, puis que $\lambda = 0$. Par conséquent, $\mathrm{sp}\,(\mathrm{A}) \subset \{0\}$. Réciproquement, 0 est bien valeur propre de A, car A n'est pas inversible d'après la question précédente. Par double inclusion,

$$\boxed{\mathrm{sp}\,(\mathrm{A}) = \{0\}}$$

Dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$, le polynôme caractéristique de A, est unitaire, scindé et de degré n. Dès lors, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - \lambda_i)$$

De plus, les racines de $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$ sont les valeurs propres de A. Ici, les valeurs propres de A sont toutes nulles, donc pour tout $i \in [\![\, 1\,;n\,]\!]$, $\lambda_i = 0$. En conclusion,

$$\boxed{\text{Le polynôme caractéristique de A est } \chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n.}$$

I-3 Supposons que la matrice nilpotente A soit diagonalisable. La matrice A est alors semblable à une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A. D'après la question I-2, la seule valeur propre de A est 0, ainsi la matrice A est semblable à O_n. Or, seule O_n est semblable à O_n, donc $\mathrm{A} = \mathrm{O}_n$. Réciproquement, la matrice O_n est diagonalisable et nilpotente. Ainsi,

$$\boxed{\text{La matrice A est diagonalisable si et seulement si } \mathrm{A} = \mathrm{O}_n.}$$

I-4 Soit B une matrice de $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{A})$, considérons $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{B} = \lambda\mathrm{A}$, par conséquent, $\mathrm{B}^p = \lambda^p \mathrm{A}^p = \mathrm{O}_n$, d'où $\mathrm{B} \in \mathscr{N}$. Finalement,

$$\boxed{\mathrm{Vect}\,(\mathrm{A}) \subset \mathscr{N}}$$

I-5 Rappelons que ${}^t(\mathrm{CD}) = {}^t\mathrm{D}\; {}^t\mathrm{C}$ pour D et C deux matrices de $\mathscr{E}$. Ainsi, par une récurrence immédiate sur l'entier naturel k, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad {}^t(\mathrm{A}^k) = ({}^t\mathrm{A})^k$$

Ainsi,
$$({}^t\mathrm{A})^p = {}^t\mathrm{O}_n = \mathrm{O}_n$$

En conclusion,
$$\boxed{{}^t\mathrm{A} \in \mathscr{N}}$$

I-6 Supposons que la matrice M soit semblable à la matrice A. Considérons alors une matrice P inversible de $\mathscr{E}$ telle que $\mathrm{M} = \mathrm{PAP}^{-1}$. Une récurrence immédiate sur $k \in \mathbb{N}$ montre que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathrm{M}^k = \mathrm{PA}^k\mathrm{P}^{-1}$$

En prenant $k = p$, il vient $\mathrm{M}^p = \mathrm{PA}^p\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PO}_n\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{O}_n$.

$$\boxed{\text{Si M est semblable à A, alors } \mathrm{M} \in \mathscr{N}.}$$

I-7 À la question I-2, on a vu que le polynôme caractéristique de A est X^n. De plus, d'après le théorème de Cayley-Hamilton (énoncé à la question de cours QC3), ce polynôme est annulateur de A. On en déduit que

$$\boxed{\mathrm{A}^n = \mathrm{O}_n}$$

I-8 Lors de la question I-7, on a vu que si M est une matrice de $\mathscr{E}$ nilpotente, alors $\mathrm{M}^n = \mathrm{O}_n$. Réciproquement, si $\mathrm{M}^n = \mathrm{O}_n$, alors il existe bien un entier naturel p tel que $\mathrm{M}^p = \mathrm{O}_n$ (prendre $p = n$). On en conclut donc que

$$\boxed{\text{Pour tout } \mathrm{M} \in \mathscr{E}, \text{ M est nilpotente si et seulement si } \mathrm{M}^n = \mathrm{O}_n.}$$