CCP Maths PSI 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Bertrand Wiel (professeur agrégé) ; il a été relu par Matthias Moreno Ray (professeur en CPGE) et Benoit Chevalier (ENS Ulm).

L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants, un d'algèbre (matrices orthogonales, réduction), un second d'analyse (intégrales dépendant d'un paramètre, séries de fonctions et séries numériques). Il couvre une large partie du programme de PSI à l'exception notable des probabilités.

Le premier problème comporte deux parties,

- La première s'intéresse au cas de la dimension deux. On étudie une application de l'ensemble des matrices antisymétriques vers le groupe spécial orthogonal privé de la matrice $-\mathrm{I}_2$, et on exhibe sa réciproque.
- La deuxième partie traite des valeurs propres d'une matrice antisymétrique en dimension quelconque puis établit l'existence d'applications entre l'ensemble des matrices antisymétriques et l'ensemble des matrices orthogonales n'ayant pas la valeur propre -1. En fin de problème, on montre que dans $\mathbb{R}^3$ toute rotation R qui n'est pas un retournement peut être paramétrée par une matrice antisymétrique A de la manière suivante :
$$\mathrm{R} = (\mathrm{I}_3 + \mathrm{A})^{-1}(\mathrm{I}_3 - \mathrm{A})$$

Le second problème est constitué de trois parties,

- Dans la première, on établit des résultats préliminaires en admettant le théorème de Weierstrass d'approximation d'une fonction continue sur un segment par une suite de fonctions polynomiales.
- La deuxième partie est consacrée au calcul de l'intégrale de Dirichlet
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$
par la méthode de transformation de Laplace. C'est l'occasion de mettre en œuvre les théorèmes et techniques d'intégration du programme. Elle demande beaucoup de soin dans la rédaction, en particulier concernant le rappel et la vérification des hypothèses des théorèmes portant sur les intégrales dépendant d'un paramètre.
- Dans la troisième, on met en lumière le « phénomène de Gibbs », c'est-à-dire l'existence d'un écart local, minoré par une constante, entre une certaine fonction et sa somme de Fourier, en manipulant les différents types de séries du programme et en s'appuyant sur le théorème de convergence dominée et le théorème spécial des séries alternées.

À l'exception des questions 7 et 8 du problème d'algèbre, l'épreuve avait un niveau de difficulté constant, sans question particulièrement ardue. Le candidat progressait en général en terrain connu, bien guidé par l'énoncé. Toutefois, la diversité des notions mises en œuvre, la longueur du sujet, le soin nécessaire à la rédaction des preuves dans le second problème et le besoin de recourir plusieurs fois et sans indication à des transformations trigonométriques, exigeaient un bon degré de préparation. En ce sens, cette épreuve constitue un très bon test d'auto-évaluation à passer au cours de la période précédant les écrits.

Indications

Problème 1

Q2 Calculer ${}^t\mathrm{R}\,\mathrm{R}$ pour établir l'orthogonalité de la matrice R.

Q3 Utiliser les propriétés de calcul des matrices de rotation.

Q5 Utiliser d'abord le fait que X est un vecteur propre puis exploiter l'antisymétrie de A.

Q6 Utiliser le fait que, d'après la question 5, la matrice A n'a pas de valeur propre réelle, et le résultat de la question 4.

Q7 Décomposer le polynôme caractéristique de A en une puissance de X et un polynôme Π sans racine réelle. Justifier que Π est de degré pair et exprimer le déterminant de R à l'aide de ce polynôme.

Q8 Multiplier chacune des matrices ${}^t\mathrm{A}$ et $-\mathrm{A}$ à gauche par $(\mathrm{I}_n + \mathrm{R})$ et à droite par $(\mathrm{I}_n + \mathrm{R}^{-1})$.

Q9 Compléter le vecteur u en une base orthonormée et appliquer la construction de la question 8 et les résultats de la partie I.

Problème 2

Q10 Intégrer par parties et majorer l'expression sous le signe intégral.

Q12 Appliquer le résultat de la question 11 à un polynôme approchant la fonction f sur l'intervalle $[\,\alpha\,;\beta\,]$.

Q13 Partir de la formule $\sin^2(u) = (1 - \cos(2u))/2$ et utiliser le résultat de la question 12.

Q15 Utiliser les résultats de la question 14 avec la fonction sinus.

Q16 Utiliser le théorème de continuité sous le signe intégral.

Q18.2 Résoudre un système 2×2 en les variables $\alpha'(x)$ et $\beta'(x)$.

Q18.3 Écrire la solution trouvée en 18.2 sous forme intégrale et faire un changement de variable.

Q19 Majorer l'intégrale après avoir effectué une intégration par parties.

Q20 Comparer à une intégrale de Riemann pour la convergence en $+\infty$. Étudier la convergence en 0 en utilisant l'inégalité $\sin(t) \leqslant t$, valable sur $\mathbb{R}_+$.

Q22 Se ramener au calcul d'une somme géométrique.

Q23 Reprendre la méthode utilisée à la question 22.

Q25 Utiliser le résultat de la question 12 avec des fonctions f et φ adaptées.

Q27 Se servir de l'équivalence $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$.

Q28 Établir

$$\mathrm{S}_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi_{n+1}(u)\,\mathrm{d}u$$

puis appliquer le théorème de convergence dominée en utilisant le résultat de la question 27.

Q29 Partir du développement en série entière de la fonction $x \longmapsto \sin(x)$.

Q30 Utiliser le théorème spécial des séries alternées.

Problème 1

Q1 Calculons le polynôme caractéristique de la matrice A.

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{X}\,\mathrm{Id} - \mathrm{A}) = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & -t \\ t & \mathrm{X} \end{vmatrix} = \mathrm{X}^2 + t^2 = (\mathrm{X} - \mathrm{i}t)(\mathrm{X} + \mathrm{i}t)$$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres complexes de A sont } it \text{ et } -it \text{ si } t \neq 0, \text{ et } 0 \text{ sinon.}}$$

Q2 D'après la question 1, la matrice A ne peut avoir comme valeur propre 1, ainsi la matrice $(\mathrm{I}_2 - \mathrm{A})$ est inversible. On sait par ailleurs que si elle existe, c'est-à-dire si son déterminant est non nul, l'inverse d'une matrice 2×2 est donné par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}_2 - \mathrm{A})^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & -1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

d'où

$$(\mathrm{I}_2 + \mathrm{A})(\mathrm{I}_2 - \mathrm{A})^{-1} = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$$

soit, finalement

$$\boxed{\mathrm{R} = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2 \end{pmatrix}}$$

Pour montrer l'orthogonalité de R, calculons ${}^t\mathrm{R}\,\mathrm{R}$.

$$\begin{aligned}{}^t\mathrm{R}\,\mathrm{R} &= \frac{1}{(1+t^2)^2} \begin{pmatrix} 1-t^2 & -2t \\ 2t & 1-t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^2} \begin{pmatrix} (1-t^2)^2 + 4t^2 & 2t(1-t^2) - 2t(1-t^2) \\ 2t(1-t^2) - 2t(1-t^2) & 4t^2 + (1-t^2)^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1 - 2t^2 + t^4 + 4t^2}{(1+t^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ {}^t\mathrm{R}\,\mathrm{R} &= \mathrm{I}_2\end{aligned}$$

La matrice R est donc orthogonale.

Enfin,

$$\begin{aligned}\det \mathrm{R} &= \det\left(\frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^2} \begin{vmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^2} ((1-t^2)^2 + 4t^2) = 1\end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{La matrice R appartient au groupe spécial orthogonal.}}$

Q3 Pour tout réel $\theta \in \mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z}$, on va essayer de se ramener à des matrices plus faciles à manipuler, en se souvenant que $1 + \cos\theta = 2\cos^2(\theta/2)$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_2 + \mathrm{R}_\theta &= \begin{pmatrix} 1+\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & 1+\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\cos^2\theta/2 & -2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) \\ 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) & 2\cos^2(\theta/2) \end{pmatrix} \\
\mathrm{I}_2 + \mathrm{R}_\theta &= 2\cos(\theta/2)\,\mathrm{R}_{\theta/2}
\end{aligned}$$

En particulier, la matrice $\mathrm{I}_2 + \mathrm{R}_\theta$ est inversible car une matrice de rotation est inversible, et $\cos(\theta/2) \neq 0$ puisque par hypothèse θ n'est pas dans $\pi\mathbb{Z}$. De cette inversibilité et des propriétés des matrices de rotation, on déduit

$$(\mathrm{I}_2 + \mathrm{R}_\theta)^{-1} = (2\cos(\theta/2))^{-1}\,\mathrm{R}_{-\theta/2} \qquad (\mathrm{R}_\alpha^{-1} = \mathrm{R}_{-\alpha})$$

et
$$\mathrm{I}_2 - \mathrm{R}_\theta = \mathrm{I}_2 + \mathrm{R}_{\theta+\pi} = 2\cos((\theta+\pi)/2)\,\mathrm{R}_{(\theta+\pi)/2} \qquad (-\mathrm{R}_\theta = \mathrm{R}_{\theta+\pi})$$

et donc
$$\begin{aligned}
(\mathrm{I}_2 + \mathrm{R}_\theta)^{-1}(\mathrm{I}_2 - \mathrm{R}_\theta) &= \frac{2\cos((\theta+\pi)/2)}{2\cos(\theta/2)}\mathrm{R}_{-\theta/2}\mathrm{R}_{(\theta+\pi)/2} \\
&= \frac{-\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}\mathrm{R}_{-\theta/2}\mathrm{R}_{(\theta+\pi)/2} \\
(\mathrm{I}_2 + \mathrm{R}_\theta)^{-1}(\mathrm{I}_2 - \mathrm{R}_\theta) &= -\tan(\theta/2)\,\mathrm{R}_{\pi/2} \qquad (\mathrm{R}_\alpha\mathrm{R}_{\beta'} = \mathrm{R}_{\alpha+\beta'})
\end{aligned}$$

d'où
$$\boxed{\mathrm{M} = (\mathrm{I}_2 + \mathrm{R}_\theta)^{-1}(\mathrm{I}_2 - \mathrm{R}_\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \tan(\theta/2) \\ -\tan(\theta/2) & 0 \end{pmatrix}}$$

> La transformation de la question 2 faisait correspondre à toute matrice antisymétrique réelle A de dimension deux une matrice de rotation d'angle différent de π. Celle de la question 3 en est la réciproque et permet de construire depuis une matrice de rotation qui n'est pas un retournement une matrice antisymétrique réelle. Cette construction va être généralisée à la dimension n dans la suite.

Q4 Multiplions l'égalité $\mathrm{CB} = \mathrm{BC}$ à gauche et à droite par la matrice C^{-1} :

$$\mathrm{C}^{-1}\mathrm{CBC}^{-1} = \mathrm{C}^{-1}\mathrm{BCC}^{-1}$$

d'où
$$\boxed{\mathrm{BC}^{-1} = \mathrm{C}^{-1}\mathrm{B}}$$

Q5 Comme X est par hypothèse un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, on a $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$. Par suite,

$$^t(\mathrm{AX})\overline{\mathrm{X}} = {}^t(\lambda\mathrm{X})\overline{\mathrm{X}} = \lambda\,{}^t\mathrm{X}\,\overline{\mathrm{X}} = \lambda\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2$$

Par ailleurs, puisque A est antisymétrique réelle,

$$^t(\mathrm{AX})\overline{\mathrm{X}} = {}^t\mathrm{X}(-\mathrm{A})\overline{\mathrm{X}} = -\,{}^t\mathrm{X}\,\overline{\mathrm{AX}} = -\,{}^t\mathrm{X}\,\overline{\lambda\mathrm{X}} = -\overline{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2$$

Le vecteur X n'étant pas nul, on en déduit que $\lambda = -\overline{\lambda}$. En conclusion

$$\boxed{\lambda \text{ est un complexe imaginaire pur (éventuellement nul).}}$$

> Un raisonnement analogue permet de montrer que les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont réelles.

Q6 D'après le résultat de la question 5, le réel -1 ne peut pas être une valeur propre de A. Donc, en notant χ_A le polynôme caractéristique de A il vient $\det(\mathrm{I}_n + \mathrm{A}) = \chi_\mathrm{A}(-1) \neq 0$. Par conséquent,