Centrale Maths 2 PC 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sophie Rainero (professeur en CPGE) ; il a été relu par Alban Levy (docteur en mathématiques) et Florian Metzger (docteur en mathématiques).

Ce sujet traite de la vitesse de convergence des suites réelles et en particulier de majorations de probabilités par des suites de limite nulle, ayant différentes vitesses de convergence, notamment dans le cadre de la loi faible des grands nombres.

- La première partie traite de suites réelles convergentes et sans sous-suite stationnaire. Pour une telle suite u de limite ℓ, on s'intéresse à l'éventuelle limite ℓ^c de la suite de terme général $|u_{n+1} - \ell|/|u_n - \ell|$, définie au moins à partir d'un certain rang. Lorsque ℓ^c existe, sa valeur permet de définir la vitesse de convergence de la suite u : lente lorsque $\ell^c = 1$, géométrique lorsque $\ell^c \in \,]\,0\,;1\,[$, rapide lorsque $\ell^c = 0$. On démontre des résultats généraux sur la vitesse de convergence et on étudie de nombreux exemples : suites de référence, suite d'intégrales généralisées, suites des sommes partielles de séries de Riemann convergentes, suite des sommes partielles d'une série exponentielle, suite récurrente définie par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Dans la seconde partie, on établit d'abord trois résultats préliminaires d'analyse, tous indépendants. On s'intéresse ensuite à des variables aléatoires X admettant un moment exponentiel d'ordre α pour $\alpha > 0$, c'est-à-dire telles que la variable aléatoire $\mathrm{e}^{\alpha|\mathrm{X}|}$ ait une espérance finie. On étudie dans un premier temps le cas de variables aléatoires suivant des lois du programme : loi de Poisson, loi géométrique, loi binomiale. On considère ensuite des suites $(\mathrm{X}_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi, vérifiant certaines hypothèses. En notant S_n la somme $\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et m l'espérance commune des X_k, on majore la probabilité $\mathbb{P}(|\mathrm{S}_n/n - m| \geqslant \varepsilon)$. On fait d'abord appel à l'inégalité donnée par la loi faible des grands nombres, puis on établit une majoration par une suite de limite nulle dont la convergence est plus rapide. Enfin, on traite le cas où $m = 0$, pour lequel on fait appel à la notion de convexité sans la nommer et sans avoir besoin de connaissances préalables sur cette notion qui n'est pas au programme.

À l'exception de la question I.B.3 qui utilise la notion d'intégrale généralisée, la partie I peut être traitée dès la première année de classes préparatoires. La seconde partie nécessite d'avoir étudié les probabilités de deuxième année, ainsi que les séries de fonctions et les séries entières. Ce sujet est un peu long mais ne comporte aucune difficulté majeure. C'est un bon problème d'entraînement qui fait appel à de nombreuses notions d'analyse et probabilité des programmes de PCSI et PC.

Indications

I.A.3 Construire une suite u de limite nulle telle que $u_{2n} = u_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.A.4 On pourra procéder par l'absurde pour montrer que $\ell^c \leqslant 1$.

I.B.2.b Utiliser le développement asymptotique de la question I.B.2.a pour trouver un équivalent de $v_n - \mathrm{e}$ puis de v_n^c quand n tend vers $+\infty$.

I.B.3.a Appliquer le théorème de convergence dominée.

I.B.3.b Suivre l'indication de l'énoncé puis appliquer encore le théorème de convergence dominée pour trouver un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

I.B.4.a Penser à une comparaison série/intégrale.

I.B.4.b Trouver un équivalent de S_n puis de S_n^c à l'aide de l'encadrement précédent.

I.C.1 Majorer la suite $(u_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ par une suite de limite nulle.

I.C.2.d Procéder par l'absurde.

I.C.3.b Pour montrer que $u \in \mathrm{E}$, vérifier que s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = \ell$, alors u est stationnaire. Écrire ensuite u_n^c à l'aide d'un taux d'accroissement pour étudier sa limite.

I.C.3.c Utiliser les questions I.C.3.b et I.A.4.

I.C.3.d Faire appel à la formule de Taylor-Young.

II.A.2 On peut démontrer à l'aide d'une étude de fonctions que, pour tout réel t dans $[\,0\,;1\,]$, $\mathrm{e}^{(b-a)(1-t)} \leqslant t + (1-t)\mathrm{e}^{b-a}$ et en déduire le résultat voulu.

II.B.2 Se servir du théorème de transfert à la fois pour caractériser l'existence des espérances et pour les calculer.

II.C.1.a Vérifier que, pour $u \geqslant 0$, $u \leqslant \mathrm{e}^{u}$ puis majorer $|\mathrm{X}|$ par une variable aléatoire d'espérance finie.

II.C.1.b Justifier que X admet un moment d'ordre 2 à l'aide du développement en série entière de l'exponentielle.

II.C.2.a Utiliser le théorème de continuité des séries de fonctions.

II.C.2.b Intuitivement, on s'attend à ce que la dérivée de la fonction $t \longmapsto \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}})$ soit la fonction $t \longmapsto \mathbb{E}(\mathrm{X}\,\mathrm{e}^{t\mathrm{X}})$, c'est-à-dire à $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}) = \mathbb{E}\Big(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}\Big)$.
Pour le démontrer rigoureusement, appliquer le théorème de la classe $\mathscr{C}^1$ des séries de fonctions en utilisant la question II.A.3.b pour majorer les dérivées.

II.C.3.b Démontrer que f est strictement décroissante au voisinage de 0^+.

II.C.4 Utiliser les deux propositions rappelées et admises dans l'énoncé.

II.C.5.a Penser à l'inégalité de Markov.

II.C.5.b Se servir des questions II.C.5.a et II.C.3.b.

II.C.6 Écrire l'ensemble $(|\mathrm{S}_n/n - m| \geqslant \varepsilon)$ comme une réunion et utiliser la question II.C.5.b pour les familles $(\mathrm{X}_k)_{k\geqslant 1}$ et $(-\mathrm{X}_k)_{k\geqslant 1}$.

II.D.2.b Faire appel à la question II.A.2.

II.D.3.a Appliquer l'inégalité de la question II.D.2.b.

II.D.5 Reprendre la démarche de la question II.C.6 et utiliser les questions II.D.3.b et II.D.4. Choisir ensuite le réel $t > 0$ qui donne le meilleur majorant.

II.D.6 Se souvenir qu'une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p a même loi que la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. Introduire une famille de variables aléatoires $(\mathrm{X}_k)_{k\geqslant 1}$ de loi de Bernoulli de paramètre p, mutuellement indépendantes, puis la famille $(\mathrm{X}_k - p)_{k\geqslant 1}$.

I. Vitesse de convergence d'une suite réelle

I.A.1 Soit u la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{1}{n+1}$$

La suite u appartient à $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, elle converge vers 0 et tous ses termes sont non nuls donc c'est un élément de E. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n^c = \left|\frac{u_{n+1} - 0}{u_n - 0}\right| = \frac{1/(n+2)}{1/(n+1)} = \frac{n+1}{n+2}$$

La suite $(u_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 1, ce qui implique que $u \in \mathrm{E}^c$. On a par conséquent prouvé que

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{E}^c \text{ est non vide.}}$$

I.A.2 La suite nulle est l'élément nul de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Or, elle n'est pas dans E, puisqu'elle est constante et égale à sa limite, elle n'est donc pas dans E^c. Par conséquent

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{E}^c \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.}$$

> En notant u la suite introduite à la question I.A.1, on remarque aussi que $u-u$ n'appartient pas à E^c, ce qui prouve que E^c n'est pas stable par combinaison linéaire.

I.A.3 Pour établir que E^c est strictement inclus dans E, il suffit de trouver un élément de E qui n'est pas dans E^c car, par définition, E^c est inclus dans E.

> Pour construire un élément de E qui n'est pas dans E^c, on cherche pour simplifier une suite de limite nulle, à termes différents de 0 au moins à partir d'un certain rang, qui ne doit pas être dans E^c, c'est-à-dire que la suite de terme général u_{n+1}/u_n ne doit pas avoir de limite. On peut alors se souvenir des exemples de suites donnés dans le cours pour lesquels la règle de d'Alembert ne s'applique pas, ou bien fabriquer simplement, comme dans l'exemple ci-dessous, une suite de limite nulle pour laquelle les quotients u_{n+1}/u_n ont des valeurs différentes selon la parité de n.

Définissons la suite u telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{2n} = u_{2n+1} = \frac{1}{3^n}$$

Les deux suites extraites d'indices pairs et impairs sont alors convergentes et ont toutes deux pour limite 0 ; on en déduit que la suite u converge vers cette limite commune, c'est-à-dire 0. Comme tous les termes de la suite sont non nuls, on peut déjà affirmer que u appartient à E. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{2n}^c = \left|\frac{u_{2n+1} - 0}{u_{2n} - 0}\right| = \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = 1$$

et

$$u_{2n+1}^c = \left|\frac{u_{2n+2} - 0}{u_{2n+1} - 0}\right| = \frac{u_{2n+2}}{u_{2n}} = \frac{1}{3}$$

Puisque les deux suites extraites $(u_{2n}^c)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1}^c)_{n\in\mathbb{N}}$ ont des limites différentes, la suite $(u_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente et ainsi $u \notin \mathrm{E}^c$. Comme on a construit un élément de E qui n'est pas dans E^c, on peut conclure que

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{E}^c \text{ est strictement inclus dans E.}}$$

I.A.4 Soit $u \in \mathrm{E}^c$, notons ℓ sa limite. Par définition,

$$\ell^c = \lim_{n\to+\infty} u_n^c = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right|$$

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \neq \ell$. Pour tout $n \geqslant n_0$, u_n^c est bien défini et $u_n^c \geqslant 0$. Par passage à la limite dans cette inégalité, il vient $\ell^c \geqslant 0$. Démontrons ensuite par l'absurde que $\ell^c \leqslant 1$. Supposons que $\ell^c > 1$. Soit $r \in \left]1\,;\ell^c\right[$ (qui est non vide puisque $1 < \ell^c$). Comme la suite $(u_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ^c, il existe un rang $n_1 \geqslant n_0$ tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, $u_n^c \geqslant r$. Ainsi, pour tout $n \geqslant n_1$,

$$|u_{n+1}-\ell| \geqslant r\,|u_n-\ell|$$

Il en découle, à l'aide d'une récurrence immédiate, que

$$\forall n \geqslant n_1 \qquad |u_n-\ell| \geqslant r^{n-n_1}\,|u_{n_1}-\ell|$$

Or, $r > 1$, donc la suite géométrique $(r^{n-n_1}\,|u_{n_1}-\ell|)_{n\geqslant n_1}$ tend vers $+\infty$ (on sait que u_{n_1} est différent de ℓ puisque $n_1 \geqslant n_0$). Par comparaison, il s'ensuit que la suite $(|u_n-\ell|)_{n\geqslant 1}$ tend aussi vers $+\infty$, ce qui est absurde car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ. On en conclut que $\ell^c \leqslant 1$ et finalement que

$$\boxed{\text{Si } u \in \mathrm{E}^c, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n^c \in [\,0\,;1\,].}$$

I.B.1 Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \left]0\,;1\right[$. Posons

$$u = \left(\frac{1}{(n+1)^k}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad v = (n^k\,q^n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{et} \qquad w = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

et étudions la convergence et la vitesse de convergence de ces trois suites.
Observons dans un premier temps que les suites u, v et w sont des suites réelles de limite nulle, à termes strictement positifs ; ce sont donc des éléments de E.

- Vitesse de convergence de la suite u : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n^c = \left|\frac{u_{n+1}-0}{u_n-0}\right| = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1/(n+2)^k}{1/(n+1)^k} = \frac{(n+1)^k}{(n+2)^k} = \left(1-\frac{1}{n+2}\right)^k$$

  La suite $(u_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, par conséquent $u \in \mathrm{E}^c$ et $\ell^c = 1$.

$$\boxed{\text{La suite } \big(1/(n+1)^k\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est dans } \mathrm{E}^c \text{ et sa vitesse de convergence est lente.}}$$

- Vitesse de convergence de la suite v : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n^c = \left|\frac{v_{n+1}-0}{v_n-0}\right| = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^k\,q^{n+1}}{n^k\,q^n} = q\left(1+\frac{1}{n}\right)^k$$

  La suite $(v_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers q, par conséquent $v \in \mathrm{E}^c$ et $\ell^c = q$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La suite } (n^k\,q^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est dans } \mathrm{E}^c \text{ et sa vitesse}\\ \text{de convergence est géométrique de rapport } q.\end{array}}$$

- Vitesse de convergence de la suite w : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n^c = \left|\frac{w_{n+1}-0}{w_n-0}\right| = \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

  La suite $(w_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, par conséquent $w \in \mathrm{E}^c$ et $\ell^c = 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (1/n!)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est dans } \mathrm{E}^c \text{ et sa vitesse de convergence est rapide.}}$$