Centrale Maths 1 PC 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Quentin Guilmant (ENS Lyon) ; il a été relu par Thierry Limoges (ENS Cachan) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Le sujet tourne autour de la notion de partitions d'un ensemble à n éléments. Comme tout sujet de combinatoire, c'est l'occasion de faire le lien entre plusieurs domaines classiques des mathématiques, comme les polynômes, les séries entières et, dans cet énoncé, les probabilités.

- La première partie propose l'étude du nombre $\mathrm{S}(n,k)$ de partitions d'un ensemble à n éléments en k parties. Il s'agit ici essentiellement de se familiariser avec la notion et d'établir une formule de récurrence utile pour la suite.
- Le deuxième partie introduit le nombre de Bell B_n qui compte les partitions d'un ensemble à n éléments ; il est égal à la somme sur k des quantités $\mathrm{S}(n,k)$ manipulées dans la partie précédente. L'objectif de cette partie est d'obtenir une expression simple de la série génératrice exponentielle $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{B}_n\, x^n/n!$ de la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- La troisième partie fait réapparaître naturellement les nombres $\mathrm{S}(n,k)$ de la première partie dans le cadre des polynômes. On établit en effet qu'il s'agit des coefficients d'une matrice de passage entre la base canonique de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et la famille bien connue des polynômes de Hilbert (même si l'énoncé ne les nomme pas explicitement). On étudie également les séries génératrices exponentielles des suites $(\mathrm{S}(n,k))_{n\in\mathbb{N}}$ pour obtenir un certain nombre de jolies formules.
- La quatrième partie définit la notion de moment d'une variable aléatoire à valeurs entières, puis relie le nombre de Bell B_n aux moments d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson.
- La cinquième et dernière partie fait pour finir le lien entre $\mathrm{S}(n,k)$ et les sommes finies $\sum\limits_{k=1}^{n} k^p$ pour p et n entiers et permet d'étudier quelques propriétés notables de ces sommes.

Ce sujet permet de constater une particularité assez fréquente en combinatoire : une suite définie initialement comme le cardinal d'une famille d'objets (en l'occurrence, le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments) intervient aussi dans des domaines a priori sans rapport. La combinatoire, relativement peu étudiée en CPGE, constitue ainsi une passerelle entre des domaines très divers. Lorsqu'elle apparaît aux concours, elle donne des énoncés riches faisant intervenir un large spectre du programme de prépa.

Indications

Partie I

I.E Utiliser la formule du triangle de Pascal.

Partie II

II.A Exprimer l'ensemble des partitions comme l'union disjointe des ensembles des partitions en k parties.

II.B Considérer une partition de $[\![1\,; n+1]\!]$ et isoler la partie contenant l'élément $n+1$.

II.C Procéder par récurrence et utiliser la question II.B.

II.D Comparer la série $\sum \big(\mathrm{B}_n/n\,!\big)x^n$ à la série $\sum x^n$.

II.E Développer en série entière le produit $\mathrm{e}^{\,x} f(x)$ à l'aide d'un produit de Cauchy.

II.F Résoudre l'équation différentielle de la question II.E.

Partie III

III.B.1 Observer que H_k divise H_{k+1} et factoriser l'expression $\mathrm{H}_{k+1} + k\mathrm{H}_k$ par le polynôme H_k.

III.B.2 Procéder par récurrence et utiliser les questions I.C et III.B.1.

III.C.1 Comparer la fonction f_k à la série entière de la question II.D.

III.C.3 Procéder par récurrence sur k, dériver la fonction f_k et comparer le problème de Cauchy obtenu à celui que satisfait la fonction g_k.

III.D.1 Reconnaître un développement limité usuel.

Partie IV

IV.A Utiliser le fait que les séries entières de terme général $a_n x^n$ et $n a_n x^n$ ont le même rayon de convergence.

IV.B.1 Appliquer les théorèmes de dérivation et d'échange entre limite et série.

IV.B.3 Prouver que la série proposée par l'énoncé converge sur $[\,-1\,;1\,]$ et définir une variable aléatoire dont la série génératrice est de la même forme à une constante multiplicative près.

IV.C.1 Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{H}_k(\mathrm{Y}))$ et utiliser la question III.B.2.

Partie V

V.A Relier k^n à une intégrale entre k et $k+1$ d'un polynôme de degré n.

V.C Utiliser la question III.B.2 et faire apparaître une somme télescopique.

V.D.3 Chercher un antécédent par Φ du polynôme X^{2r+1}.

V.E.1 Utiliser la question V.A.

V.E.2 Écrire P_r sous une forme développée et calculer $\Phi(\mathrm{P}_r)$ sous forme développée.

I. Nombre de partitions en k parties

I.A Remarquons que toute partition de l'ensemble $[\![1\,;n]\!]$ en k parties est obtenue en choisissant k sous-ensembles deux-à-deux disjoints de $[\![1\,;n]\!]$. Or, il y a 2^n sous-ensembles de $[\![1\,;n]\!]$. Ainsi, le nombre de partitions en k parties est majoré par $\dbinom{2^n}{k}$. En particulier,

$$\boxed{\text{Le nombre de partitions de } [\![1\,;n]\!] \text{ en } k \text{ parties est fini.}}$$

I.B.1 Une partitions de l'ensemble $[\![1\,;n]\!]$ en k parties ne peut pas contenir strictement plus de n sous-ensembles, car chacun d'entre-eux doit être non vide. Ainsi,

$$\boxed{\text{Si } k > n, \text{ alors } \mathrm{S}(n,k) = 0.}$$

I.B.2 Pour tout entier n non nul, l'ensemble $\{[\![1\,;n]\!]\}$ est l'unique partition de l'ensemble $[\![1\,;n]\!]$ en 1 partie, de sorte que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{S}(n,1) = 1}$$

I.C Notons $\mathcal{E}_k^n$ l'ensemble des partitions de $[\![1\,;n]\!]$ en k parties. On sépare cet ensemble en deux sous-ensembles disjoints :

- l'ensemble $\mathcal{E}_{k,1}^n$ des partitions en k parties dont l'une d'elles est réduite à l'élément n ;
- l'ensemble $\mathcal{E}_{k,2}^n$ des partitions en k parties dont aucune n'est réduite à n.

Ainsi,
$$\mathrm{S}(n,k) = |\mathcal{E}_k^n| = |\mathcal{E}_{k,1}^n| + |\mathcal{E}_{k,2}^n|$$

Déterminons maintenant les cardinaux de $\mathcal{E}_{k,1}^n$ et $\mathcal{E}_{k,2}^n$.

- Étant donné un élément de $\mathcal{E}_{k,1}^n$, si l'on supprime la partie réduite à n, on obtient une partition de $[\![1\,;n-1]\!]$ en $k-1$ parties. Cette opération est bijective, la réciproque consistant simplement à rajouter la partie $\{n\}$. On en déduit en particulier que
$$|\mathcal{E}_{k,1}^n| = |\mathcal{E}_{k-1}^{n-1}| = \mathrm{S}(n-1,k-1)$$
- Soit maintenant un élément de $\mathcal{E}_{k,2}^n$. Si l'on supprime l'élément n de la partie à laquelle il appartient, on obtient cette fois une partition de $[\![1\,;n-1]\!]$ en k parties. Cependant, l'opération n'est plus bijective, mais surjective, et chaque élément de $\mathcal{E}_k^{n-1}$ admet exactement k antécédents puisque l'on a k choix pour la partie à laquelle on va rajouter n. Il vient cette fois que
$$|\mathcal{E}_{k,2}^n| = k \cdot |\mathcal{E}_k^{n-1}| = k \cdot \mathrm{S}(n-1,k)$$

On peut conclure de tout ceci que

$$\boxed{\mathrm{S}(n,k) = \mathrm{S}(n-1,k-1) + k \cdot \mathrm{S}(n-1,k)}$$

I.D.1 Il s'agit de donner un code qui reprenne tous les cas vus précédemment. Plus précisément, les conventions de l'énoncé et la question I.B donnent les cas de base, la question précédente permet de construire le cas récursif. Il suffit en fait de remarquer que le système de calcul est très proche de la méthode de remplissage du triangle de Pascal. On traitera donc les cas des bordures, c'est-à-dire quand $n = 0$ ou $k = 0$, puis les cas qui n'ont pas de sens et enfin le cas général.

```
def calculS(n,k):
  #Tester les cas "convention".
  if n==0 and k==0:
    #On traite ici le cas n=k=0
    return 1
  elif n==0 or k==0:
    #On traite ici les cas 0=n<k et 0=k<n
    return 0
  elif k>n:
    #On traite ici le cas qui n'a pas de sens k>n
    return 0
  #cas recursif
  else:
    res = calculS(n-1,k-1) + k*calculS(n-1,k)
    return res
```

> On peut remarquer que cette fonction termine. En effet, une quantité strictement décroissante est la somme des deux arguments, et pourtant elle doit rester entière et positive.

I.D.2 Notons $\mathrm{C}(n,k)$ le nombre d'opérations nécessaires dans l'algorithme précédent pour calculer $\mathrm{S}(n,k)$. En raison des appels récursifs si $1 \leqslant k \leqslant n$, alors

$$\mathrm{C}(n,k) = \mathrm{C}(n-1,k-1) + \mathrm{C}(n-1,k) + 2 \geqslant \mathrm{C}(n-1,k-1) + \mathrm{C}(n-1,k)$$

> Remarquons ici que c'est une formule combinatoire qui correspond au triangle de Pascal.

Si $k > n$, seul l'appel de la fonction est fait et

$$\mathrm{C}(n,k) = 1 \geqslant \binom{n}{k} = 0$$

Maintenant, supposons $k \leqslant n$ et procédons par récurrence. Considérons la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \qquad \forall k \in [\![\, 0\,;n \,]\!] \quad \mathrm{C}(n,k) \geqslant \binom{n}{k}$$

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie car, en considérant le coût de l'appel de la fonction,

$$\mathrm{C}(0,0) = 1 = \binom{0}{0}$$

- $\underline{\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)}$: Soit $k \in [\![\, 0\,;n+1 \,]\!]$. Si $k = 0$, alors encore une fois, seul l'appel de la fonction est compté et

$$\mathrm{C}(n+1,0) = 1 = \binom{n+1}{0}$$

  Si $1 \leqslant k \leqslant n$, alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}(n+1,k) &= \mathrm{C}(n,k-1) + \mathrm{C}(n,k) + 2 \\
&\geqslant \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} + 2 && \text{(d'après } \mathscr{P}(n)\text{)} \\
&\geqslant \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \\
\mathrm{C}(n+1,k) &\geqslant \binom{n+1}{k} && \text{(règle de Pascal)}
\end{aligned}$$