X/ENS Maths A MP 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Florian Metzger (docteur en mathématiques) ; il a été relu par Rémi Pellerin (ENS Lyon) et Sophie Rainero (professeur en CPGE).

Ce sujet traite des formes symplectiques sur un espace vectoriel réel E de dimension finie n paire, c'est-à-dire des formes bilinéaires antisymétriques non dégénérées sur E. Le but est d'en montrer plusieurs propriétés, d'étudier les endomorphismes symétriques pour ces formes symplectiques ainsi que de montrer l'existence de structures complexes qui sont dites domptées par une certaine forme symplectique ω. Une telle structure désigne un automorphisme J de E vérifiant $\mathrm{J}^2 = -\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ tel que $\omega(x, \mathrm{J}(x)) > 0$ pour tout vecteur $x \neq 0$. La partie II peut être résolue indépendamment des autres.

- Dans la première partie sont établis des résultats élémentaires sur les formes symplectiques ayant pour but de montrer qu'étant donné une forme symplectique ω, il existe une base de E dans laquelle sa matrice écrite par blocs est
$$\mathrm{J}_n = \begin{pmatrix} 0_{n/2} & -\mathrm{I}_{n/2} \\ \mathrm{I}_{n/2} & 0_{n/2} \end{pmatrix}$$
Il en résulte l'existence d'une structure complexe domptée par ω.
- La deuxième partie permet d'obtenir deux résultats sur les polynômes qui seront utiles dans le reste du problème. Le premier est qu'il existe pour tout $d \geqslant 1$ une fonction sur $\mathbb{R}_d$ à valeurs réelles, polynomiale par morceaux, qui est non nulle pour tout polynôme à racines complexes simples. Le second résultat est que $f^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est dense dans $\mathbb{R}^d$ pour toute fonction polynomiale réelle non nulle $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.
- Dans la troisième partie, deux formes symplectiques ω et ω_1 sont fixées et l'on introduit les endomorphismes symétriques pour ω. On étudie leur réduction sous certaines hypothèses portant sur leur polynôme caractéristique. On montre en particulier que l'espace E peut être décomposé en somme directe de sous-espaces stables par un endomorphisme u symétrique pour ω, sur lesquels ω et ω_1 restent symplectiques. Si χ_u est à racines complexes au plus doubles, on peut alors trouver une base dans laquelle $\mathrm{Mat}\,(\omega)$ est diagonale avec des blocs de J_2 et J_4 et $\mathrm{Mat}\,(\omega_1)$ est diagonale par blocs qui sont des multiples de J_2 ou des $r\mathrm{Q}_\theta$ avec $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R} \smallsetminus \pi\mathbb{Z}$ et
$$\mathrm{Q}_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{R}_{-\theta} \\ \mathrm{R}_\theta & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad \mathrm{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
- La dernière partie a pour but l'étude des liens d'implication entre l'existence d'une structure complexe domptée à la fois par ω et ω_1, et le fait que le segment $\{(1-t)\omega + t\omega_1 \mid t \in [\,0\,;1\,]\}$ est inclus dans l'ensemble des formes symplectiques sur E.

Un grand nombre de questions de ce sujet sont des résultats classiques sur les formes bilinéaires, qui ne sont plus au programme depuis 2014. Quelques questions sont abordables ; les autres sont d'un niveau assez soutenu, certaines étant même ardues car elles nécessitent du recul sur le sujet, une très bonne maîtrise des outils d'algèbre linéaire et de polynômes, mais aussi beaucoup d'initiative et de technicité.

Indications

Partie I

1 Introduire une base de E et considérer les formes linéaires qui sont nulles sur la base sauf sur un de ses vecteurs en lequel elles prennent la valeur 1.

3.a Raisonner par analyse-synthèse en choisissant des X et Y adéquats pour trouver les coefficients de la matrice M.

3.b Utiliser l'antisymétrie d'une forme ω sur la base canonique et la question 3.a.

3.c Avec la question 3.b, expliciter la forme des matrices de $\mathrm{A(E)}$ quand $\dim \mathrm{E} = 2$.

3.d On pourra montrer successivement $(\mathcal{E}_1) \Longrightarrow (\mathcal{E}_2) \Longrightarrow (\mathcal{E}_3) \Longrightarrow (\mathcal{E}_1)$ et utiliser les questions 1, 3.a ainsi que le morphisme φ_ω.

5 Réécrire ω_0 à l'aide du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ pour la bilinéarité. Les caractères antisymétrique et symplectique se prouvent à l'aide des conditions obtenues en 3.b et 3.d.

7.a En dimension finie, tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.

7.d On pourra se servir du théorème du rang et de la question 7.a.

7.e Pour la somme directe, faire référence aux questions 7.b et 7.d. Regarder ensuite ce que donne la matrice de ω dans une base adaptée à la somme directe.

8 Prouver qu'il existe un plan de E sur lequel ω est symplectique et appliquer les résultats des questions 7.d et 7.e pour obtenir l'hérédité.

9 Réindexer les vecteurs d'une base $\widetilde{\mathcal{B}}$ donnée par la question 8.

Partie II

10 Remarquer que l'isomorphie de $\mathrm{L}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}}$ est équivalente à son injectivité. Regarder ensuite son noyau quand $\mathrm{pgcd}\,(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = 1$. Réciproquement, si $\mathrm{L}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}}$ est un isomorphisme, alors il est surjectif. Or $1 \in \mathbb{R}_{p+q-1}[\mathrm{X}]$.

11 Les racines complexes d'un polynôme réel P sont simples si et seulement si $\mathrm{pgcd}\,(\mathrm{P}, \mathrm{P}') = 1$. On pourra donc considérer l'application $\mathrm{L}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}}$ pour P et Q bien choisis. Attention cependant aux conditions de degrés pour pouvoir définir $\mathrm{L}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}}$: on pourra donner une définition de r « par morceaux ». Quelle application polynomiale en les coefficients peut être utilisée pour décréter si une application linéaire est un isomorphisme ?

12 On pourra établir que $f^{-1}(\{0\})$ est d'intérieur vide. Pour cela on raisonnera par l'absurde et on montrera qu'une fonction polynomiale s'annulant sur un produit cartésien d'intervalles ouverts non vides est nécessairement nulle.

Partie III

13 Remarquer que pour tout $x \in \mathrm{E}$ fixé, $\omega_1(x, \cdot) \in \mathrm{E}^*$ et que ω est symplectique. Pour la bijectivité, on pourra s'intéresser au noyau de u.

14.a Utiliser la formulation matricielle de $\omega(x, y)$ donnée à la question 3.a. Que dire si A et B sont deux matrices telles que ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{A}\mathrm{Y} = {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{B}\mathrm{Y}$ pour tout couple de vecteurs colonnes $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$?

14.b En utilisant la question 14.a, chercher la matrice U par blocs sous la forme

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} \mathrm{N} & \mathrm{M} \\ \mathrm{R} & \mathrm{S} \end{pmatrix}$$

pour $\mathrm{N}, \mathrm{M}, \mathrm{R}, \mathrm{S}$ matrices de taille $(2, 2)$.

14.c Le théorème de Cayley-Hamilton pourra être appliqué en explicitant le polynôme caractéristique de matrices de taille 2.

16 Interpréter Z_1, Z_2 comme parties réelle et imaginaire de Z, idem pour Y. Montrer que la famille $(Z_1, Z_2, Y_1, -Y_2)$ est libre dans $\mathbb{R}^4$. Il pourra être utile de considérer $U\overline{Z}$.

17 Montrer que si V, W sont vecteurs propres de U pour $\lambda \notin \mathbb{R}$, alors ${}^t\overline{V}\,J_2 W = 0$ et l'appliquer pour Y, Z en identifiant les parties réelles et imaginaires.

18 Écrire les nouveaux vecteurs y_1, y_2 obtenus pour ξY si $\xi = \xi_1 + i\xi_2 \in \mathbb{C}^*$. Remarquer que les conditions demandées par l'énoncé se réécrivent sous la forme d'un système linéaire avec une matrice dont l'inversibilité peut être étudiée à l'aide de la question 17.

19 Utiliser la question 18 pour trouver une base dans laquelle la matrice de ω est J_4. Que dire de celle de u dans la même base ?

20 Utiliser le lemme des noyaux ainsi que le fait que u commute avec tout endomorphisme qui est un polynôme en u.

21 Choisir une base de E dans laquelle la matrice de ω est J_n. Chercher, comme à la question 14.a, une relation vérifiée par U, la matrice de u dans cette base. Il pourra également être judicieux d'utiliser une relation de Bézout entre P_j et P_k pour écrire $x \in F_k$ et $y \in F_j$ faisant intervenir des polynômes d'endomorphismes en $P_j(u)$ et $P_k(u)$. Ce faisant, évaluer $\omega(x, y)$ en utilisant la forme matricielle de la question 3.a.

22 Se servir du critère obtenu à la question 7.b ainsi que des résultats des questions 20 et 21.

23 C'est une question de synthèse de plusieurs questions précédentes. Considérer une décomposition en facteurs premiers de χ_u donnée par ses racines complexes. Utiliser ensuite les sous-espaces F_j associés par la question 20. On pourra montrer que si $\chi_u = (X - \lambda)^m Q$ avec $Q(\lambda) \neq 0$, alors $\dim \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E)^m = m$.

Partie IV

24 Construire une structure complexe domptée par $\omega_{|F_j \times F_j}$ et $\omega_{1|F_j \times F_j}$ sur chaque sous-espace F_j d'une décomposition en somme directe comme à la question 23. Remarquer que les restrictions à des sous-espaces de dimensions 2 et 4 ont été étudiées aux questions 3.c et 19. L'hypothèse $(\mathcal{F}_2)$ pourra être utilisée pour montrer que les restrictions de ω et ω_1 à des espaces F_j de dimension 2 sont strictement positivement liées.

25 Commencer par raisonner en reformulant $\mathcal{S}$ à l'aide de relations matricielles. On pourra ensuite remarquer que

$$D = \left\{ U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t U\,J_n = J_n U \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Penser aux questions 11 et 12 pour construire, à l'aide d'un d bien choisi, une application polynomiale de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ dont l'image réciproque permet de décrire l'ensemble dont on souhaite montrer la densité. On pourra enfin remarquer que les applications suivantes

$$\mathcal{X} : \begin{cases} D \longrightarrow \mathbb{R} \\ U \longmapsto r(\chi_U{}') \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \delta : \begin{cases} D \longrightarrow \mathbb{R} \\ U \longmapsto \det U \end{cases}$$

sont polynomiales et que deux ouverts denses ont une intersection dense.

26 L'énoncé semble indiquer une piste qui ne permet pas d'aboutir. On pourra quand même expliciter la stratégie suggérée et quelles en sont les limites.

I. Bases symplectiques

1 Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Exhibons une famille libre et génératrice de E^* à l'aide de $\mathscr{B}$. Il suffit de définir les formes linéaires sur $\mathscr{B}$. Soit donc, pour tout $i \in [\![1\,; n]\!]$, la forme linéaire e_i^* vérifiant

$$\forall (i,j) \in [\![1\,; n]\!]^2 \qquad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$

où l'on rappelle que $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker défini par

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi e_i^* est l'application qui donne la i^{e} coordonnée d'un vecteur dans la base $\mathscr{B}$. Établissons que $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^*.

Montrons que $\mathscr{B}^*$ est génératrice de E^*. Soient $\varphi \in \mathrm{E}^*$ et $x \in \mathrm{E}$. Écrivons

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) e_i$$

Par linéarité de φ, $$\varphi(x) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)\varphi(e_i)$$

ce qui fournit $$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$$

et donc $\mathscr{B}^*$ est génératrice.

Montrons que la famille $\mathscr{B}^*$ est libre dans E^*. Fixons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* = 0$$

L'évaluation de la forme linéaire du membre de gauche de cette inégalité en tout e_j de la base $\mathscr{B}$ fournit pour tout $j \in [\![1\,; n]\!]$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{i,j} = \lambda_j$$

Cela prouve la liberté de $\mathscr{B}^*$.

Finalement, $\mathscr{B}^*$ est une base de E^* et par suite

$$\boxed{\dim \mathrm{E}^* = \dim \mathrm{E} = n}$$

> La base $\mathscr{B}^*$ s'appelle *base duale de la base* $\mathscr{B}$. Réciproquement, si une base B' de E^* est donnée, il existe une unique base B de E dont la duale est B'. La base B est appelée *base antéduale de* B'.

2 Soient $\omega \in \mathrm{A(E)}$ et $x \in \mathrm{E}$. Comme ω est antisymétrique, la définition de A(E) assure que $\omega(x,y) = -\omega(y,x)$ pour tout $(x,y) \in \mathrm{E}^2$ donc en particulier, pour $x = y$,

$$\omega(x,x) = -\omega(x,x)$$

soit $2\omega(x,x) = 0$. Comme 2 est inversible dans $\mathbb{R}$, l'égalité précédente assure que

$$\boxed{\omega(x,x) = 0}$$

> Le résultat que l'on vient de démontrer s'appelle caractère *alterné* de la forme bilinéaire. On définit la caractéristique d'un corps k (notée $\mathrm{car}(k)$) comme l'unique entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}\,\psi = p\mathbb{Z}$ où ψ est le morphisme $n \mapsto n \cdot 1_k$ de $\mathbb{Z}$ dans k. La caractéristique est donc le plus petit nombre de fois qu'il