Mines Maths 1 MP 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Rémi Pellerin (ENS Lyon) ; il a été relu par Hervé Diet (professeur agrégé) et Antoine Sihrener (professeur en CPGE).

Ce sujet propose l'étude de deux endomorphismes u et v sur des espaces fonctionnels. Chaque partie s'appuie sur les précédentes. La difficulté est croissante au sein d'une partie, mais pas d'une partie à l'autre.

- La première partie établit quelques résultats préliminaires qui seront utiles tout au long du sujet. Elle demande également de justifier que les objets introduits sont bien définis et se termine sur une rapide étude des intégrales de Wallis. Il vaut mieux ne pas se tromper à la question 5 tant son résultat sera réutilisé par la suite.
- La deuxième partie a pour but l'étude de la continuité de ces endomorphismes pour certaines normes en dimension infinie. Un résultat de densité, fondamental pour la suite, y est prouvé.
- La troisième partie démontre l'inversibilité des endomorphismes considérés. Elle se termine par deux applications qui font appel au calcul intégral et à quelques formules de trigonométrie circulaire et hyperbolique en bordure du programme.
- La quatrième partie propose une étude des éléments propres de u et v et se termine par un peu de topologie.

Ce problème de longueur raisonnable permet de bien revoir les particularités de la dimension infinie. On y trouve des normes non équivalentes, de la réduction en dimension infinie et des applications dont la continuité dépend de la norme considérée. Il permet de réviser les espaces vectoriels normés, la topologie, les séries entières, les théorèmes de permutation somme/intégrale et les intégrales à paramètres. Dans l'ensemble, le sujet n'est ni très difficile ni très long, mais il exige d'avoir les idées claires sur les fondamentaux. Cependant, beaucoup de questions sont ouvertes et certains résultats utiles pour la suite ne sont pas donnés. Une lecture intégrale du sujet avant de commencer à écrire était (comme toujours) utile car certaines réponses pouvaient être déduites d'autres questions.

Indications

Partie A

1 Attention à bien comprendre ce que signifie « au voisinage de zéro » !

2 Montrer que $u(f)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Remarquer que $v(f)(x) = f(0) + x\,\dfrac{\pi}{2}\,u(f')$. Attention à ne pas oublier de vérifier que les intégrandes sont bien définies sur l'intervalle d'intégration.

4 Faire une intégration par parties en partant de $\sin^{n+2}(t) = (1 - \cos^2(t))\sin^n(t)$.

5 Commencer par établir que $\mathrm{W}_{n+1} \sim \mathrm{W}_n$.

Partie B

6 Penser à un théorème du programme sur la continuité des applications linéaires sur des espaces vectoriels normés.

7 Considérer $f(x) = (x/a)^n$.

9 Penser au théorème d'approximation de Stone-Weierstrass.

Partie C

11 Montrer que v est injective.

12 Montrer que u est continue de $(\mathcal{E}, \mathrm{N})$ dans $(\mathcal{E}, \mathrm{N})$.

13 La fonction Argsh n'est pas au programme. On donne les propriétés utiles à la résolution de cette question en remarque. On notera en particulier que

$$\mathrm{Argsh}'(x) = 1/\sqrt{1+x^2}$$

14 Commencer par établir certaines implications puis utiliser que $u \circ v = v \circ u = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.

Partie D

16 Penser à la permutation série intégrale.

17 Montrer par l'absurde que $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.

18 Raisonner par analyse-synthèse.

19 Montrer qu'une suite de valeurs propres de v qui converge est stationnaire.

A. Préliminaires

1 Montrons que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$. Considérons la fonction suivante entre les espaces vectoriels $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et $\mathcal{E}$:

$$\phi\colon \begin{cases} \mathbb{C}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathcal{E} \\ \ \mathrm{P} \quad \longmapsto (x \mapsto \mathrm{P}(x)) \end{cases}$$

Vérifions que ϕ est linéaire. Soient $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors

$$\begin{aligned} \phi(\lambda\mathrm{P} + \mathrm{Q}) &= (x \mapsto (\lambda\mathrm{P} + \mathrm{Q})(x)) \\ &= \lambda\,(x \mapsto \mathrm{P}(x)) + (x \mapsto \mathrm{Q}(x)) \\ \phi(\lambda\mathrm{P} + \mathrm{Q}) &= \lambda\phi(\mathrm{P}) + \phi(\mathrm{Q}) \end{aligned}$$

De plus, $\mathrm{Im}\ \phi = \mathcal{P}$ donc

$$\boxed{\mathcal{P} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{E}.}$$

> Un morphisme de ce type est souvent appelé « morphisme d'évaluation ».

Montrons que $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$. Par définition, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$. En outre, $\mathcal{D}$ n'est pas vide car $0_{\mathbb{R}^{\mathrm{I}}} \in \mathcal{D}$. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{D}$ et $g \in \mathcal{D}$. Les applications f et g sont développables en séries entières au voisinage de zéro. Par définition, il existe un intervalle de la forme $[\,-\varepsilon\,;\varepsilon\,]$ avec $\varepsilon > 0$, un intervalle de la forme $[\,-\alpha\,;\alpha\,]$ avec $\alpha > 0$ et deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall x \in [\,-\varepsilon\,;\varepsilon\,] \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

et

$$\forall x \in [\,-\alpha\,;\alpha\,] \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

En considérant $\mu = \mathrm{Min}\,(\varepsilon, \alpha)$, on a

$$\forall x \in [\,-\mu\,;\mu\,] \qquad \begin{aligned} (\lambda f + g)(x) &= \lambda f(x) + g(x) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \\ (\lambda f + g)(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + b_n)\, x^n \end{aligned}$$

par linéarité du développement en série entière. Ceci prouve que $\lambda f + g$ admet un développement en série entière sur un voisinage de zéro (car $\mu > 0$) et par conséquent $\lambda f + g \in \mathcal{D}$. Finalement,

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{E}.}$$

2 Vérifions d'abord que u et v sont bien définies sur $\mathcal{E}$. Soit $f \in \mathcal{E}$. Il s'agit tout d'abord de vérifier que pour tout $t \in [\,0\,;\pi/2\,]$, et pour tout $x \in \mathrm{I}$, la quantité $x \sin^n(t)$ reste bien dans I. C'est le cas car

$$\forall x \in [\,-a\,;a\,] \quad \forall t \in \left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right] \qquad -a \leqslant -a\sin(t) \leqslant x\sin(t) \leqslant a\sin^n(t) \leqslant a$$

Ainsi, les intégrandes sont bien définies sur $[\,0\,;\pi/2\,]$. De plus, celles-ci sont continues sur le segment $[\,0\,;\pi/2\,]$ ce qui prouve que les intégrales existent bien. Par conséquent, pour tout $f \in \mathcal{E}$, $u(f)$ et $v(f)$ sont bien définies. On vérifie également que u et v sont bien linéaires par linéarité de la dérivation, de l'intégrale et de l'évaluation en 0.

Montrons désormais que u et v sont à valeurs dans $\mathcal{E}$. Pour ce faire, il suffit d'établir que pour tout $f \in \mathcal{E}$, $u(f)$ et $v(f)$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$. Posons

$$g(x,t) = f(x\sin(t))$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrons que $u(f)$ est de classe $\mathscr{C}^n$.

- Pour tout $t \in \mathrm{I}$, l'application $g(\cdot,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I par les théorèmes généraux. On vérifie que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t) = \sin^k(t) f^{(k)}(x\sin(t))$$

- $\forall (x,t) \in \mathrm{I} \times [\,0\,;\pi/2\,] \qquad \left|\dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)\right| = \left|\sin^n(t) f^{(n)}(x\sin^n(t))\right| \leqslant \|f^{(n)}\|_\infty$
- L'application $\big(t \mapsto \|f^{(n)}\|_\infty\big)$ existe bien par continuité de $f^{(n)}$ sur le compact I. Elle est indépendante de x et intégrable sur I.
- Pour tout $k \in [\![\,0\,;n-1\,]\!]$, tout $x \in \mathrm{I}$, l'application $\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,\cdot)$ est intégrable et continue par morceaux sur $[\,0\,;\pi/2\,]$ (car la domination précédente est valable pour tout n).

> La dernière hypothèse de continuité par morceaux du théorème n'est en fait pas nécessaire. En effet, la théorie de l'intégration de Lebesgue permet de s'en affranchir. Ce n'est cependant pas le cas de la théorie de Riemann en vigueur au programme. Attention à ne pas l'oublier !

Ainsi, la fonction $u(f)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et sa dérivée n^{e} est

$$u(f)^{(n)}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) f^{(n)}(x\sin(t))\,\mathrm{d}t$$

Montrons maintenant que $v(f)$ est elle aussi de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Commençons par remarquer que

$$v(f)(x) = f(0) + x\,\frac{\pi}{2}\,u(f')$$

Comme $f' \in \mathcal{E}$, $u(f')$ est de classe $\mathscr{C}^n$ d'après ce qui précède. Il vient que $v(f)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ d'après les théorèmes généraux. Ainsi, $u(f)$ et $v(f)$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$. De plus, u et v sont linéaires donc

$$\boxed{u \text{ et } v \text{ sont des endomorphismes de } \mathcal{E}.}$$

3 Soit $f \in \mathcal{P}$. Montrons que $u(f)$ et $v(f)$ appartiennent à $\mathcal{P}$. Par définition de f, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ et $(a_0,\cdots,a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} a_n x^n$$

Calculons d'abord, pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$\begin{aligned} u(f)(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} a_n x^n \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{2}{\pi}\,a_n \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t\right) x^n \\ u(f)(x) &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{2}{\pi}\,a_n \mathrm{W}_n x^n \end{aligned}$$