Centrale Physique et Chimie 1 PSI 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sylvie Su (ENS Lyon) et Julien Dumont (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Tom Morel (Professeur en CPGE).

Ce sujet propose d'étudier un système d'alimentation d'eau constitué d'une pompe reliée à un moteur magnétique ainsi que les critères permettant de choisir ce moteur et son fonctionnement.

- Dans la première partie, on s'intéresse à l'écoulement dans des tuyaux réels et plus particulièrement aux pertes de charge dont ils sont le siège. Cette partie est longue et nécessite de bien connaître le cours de mécanique des fluides.
- Dans un deuxième temps, on étudie les caractéristiques d'une pompe centrifuge afin de la choisir pour répondre au cahier des charges d'une installation réelle. Cette partie est originale et intéressante. Elle permet d'appliquer le cours dans un contexte pratique.
- Enfin, on étudie plus précisément le fonctionnement du moteur magnétique synchrone utilisé en association avec la pompe sélectionnée. Cette partie, beaucoup plus proche du cours, nécessite parfois de longs et fastidieux calculs mais balaie une large partie du cours de spé sur la conversion de puissance.

Ce problème intéressant aborde de façon indépendante des notions d'hydrodynamique et de conversion électromagnétomécanique. Il demande également des lectures de courbes et comporte des questions proches du cours mais qui nécessitent quelque réflexion. Ce sujet est le premier à aborder les moteurs synchrones ; il offre donc une occasion rare de travailler et réviser ce chapitre.

Indications

Partie I

I.A.1.e Attention à la définition de ΔH, notamment à son signe.

I.A.2.b Penser aux caractéristiques de l'écoulement pour exprimer $\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}$ en fonction de ΔH et pouvoir utiliser I.A.1.e.

I.B.1.d De quel régime les valeurs proposées permettent-elles de se rapprocher ?

I.B.2.b Dans la lecture du diagramme, il faut d'abord calculer le nombre de Reynolds pour se positionner en abscisse, puis le rapport ε/D pour trouver la courbe pertinente à partir de l'axe des ordonnées à droite.

Partie II

II.A.1 Une explication qualitative suffit.

II.B.1 Évaluer à partir de la figure 2 le débit maximal que l'on peut obtenir avec une pompe.

II.B.2 Là encore, il faut exploiter le diagramme de Moody.

Partie III

III.B.2 Le champ total est obtenu par superposition des champs individuels.

III.C.2 La question consiste à intégrer la densité volumique d'énergie magnétique dans tout l'entrefer. Elle est très (voire extrêmement) calculatoire.

I. Pertes de charge dans les conduites

I.A.1.a Détaillons les définitions demandées :

- un écoulement parfait est un écoulement pour lequel on peut négliger la viscosité et la diffusion thermique ;
- un écoulement est homogène si ses propriétés macroscopiques ne dépendent pas de la position, alors qu'il est incompressible si la masse volumique d'une particule de fluide est constante au cours de l'écoulement ;
- un écoulement est stationnaire si ses propriétés ne dépendent pas du temps.

I.A.1.b Pour un système ouvert, en régime stationnaire et entre deux points d'un même tube de courant, le premier principe de la thermodynamique s'écrit

$$\Delta(h + e_\mathrm{c} + e_\mathrm{p}) = w_\mathrm{u} + q$$

où h, e_c et e_p désignent respectivement l'enthalpie massique, et les énergies massiques cinétique et potentielle du système. w_u et q sont respectivement le travail utile massique (c'est-à-dire autre que celui des forces pressantes ou conservatives) et le transfert thermique massique. Dans le cas d'un fluide parfait, ces deux dernières grandeurs sont nulles. Sous les hypothèses effectuées, la variation Δu d'énergie interne massique est nulle. Or, celle-ci intervient dans l'expression de la variation d'enthalpie massique, puisque

$$\Delta h = \Delta\Big(u + \frac{p}{\rho}\Big)$$

où p est la pression et ρ la masse volumique. L'énergie potentielle massique se limite à celle de pesanteur d'expression gz. L'énergie cinétique massique est $v^2/2$. Finalement, on peut récrire le premier principe selon

$$\boxed{\Delta\left(\frac{1}{2}\,v^2 + gz + \frac{p}{\rho}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad e_\mathrm{T} = \frac{1}{2}\,\rho v^2 + \rho g z + p = \mathrm{C^{te}}}$$

Ce terme e_T s'identifie à l'énergie totale volumique dont on vient de démontrer la constance le long d'une ligne de courant. Par conséquent,

$$\boxed{\mathrm{H} = \frac{e_\mathrm{T}}{\rho g}}$$

appelée hauteur manométrique, ou charge totale, est également une constante.

I.A.1.c Dans un fluide réel, la viscosité n'est pas nulle et joue un rôle non négligeable près des parois, où la vitesse du fluide est celle de la paroi.

> C'est l'exemple d'une conduite cylindrique, dans laquelle le profil des vitesses est parabolique si on prend en compte la viscosité, alors qu'il est uniforme sinon. C'est justement ce profil parabolique que l'on retrouve dans les questions suivantes.

I.A.1.d Le seul mécanisme de dissipation de l'énergie présent entre deux points A et B est celui dû aux forces de viscosité et correspond à un travail massique supplémentaire à prendre en compte par rapport à la question I.A.1.b. Ce travail s'identifie à la circulation des forces de viscosité et le premier principe se réécrit

$$\boxed{e_\mathrm{T}(\mathrm{B}) - e_\mathrm{T}(\mathrm{A}) = \int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \overrightarrow{f}_\mathrm{visq} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}}$$

> Remarquons qu'ici les forces de viscosité sont opposées au déplacement, ainsi le produit scalaire est négatif et l'intégrale également : cela correspond bien à une perte d'énergie sur le chemin allant de A à B.

I.A.1.e D'après la question I.A.1.b, $\mathrm{H} = e_{\mathrm{T}}/\rho g$. En divisant la réponse à la question précédente par ρg, la perte de charge s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathrm{H(B)} - \mathrm{H(A)} &= \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{\overrightarrow{f}_{\mathrm{visq}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}}{\rho g} \\
&= \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{\eta\,\Delta\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}}{\rho g} \\
\mathrm{H(B)} - \mathrm{H(A)} &= \frac{\eta}{\rho g} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \Delta\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}
\end{aligned}$$

Comme la perte de charge $\Delta\mathrm{H}$ est l'opposée de cette quantité,

$$\boxed{\Delta\mathrm{H} = \mathrm{H(A)} - \mathrm{H(B)} = -\,\frac{\eta}{\rho g} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \Delta\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}}$$

> En l'absence de viscosité, la perte de charge est bien nulle. De plus, le caractère positif de cette quantité justifie le nom de « perte » de charge : l'énergie totale ne peut que diminuer.

I.A.2.a Si v dépendait de x, la densité volumique de particules serait modifiée par accumulation ou désertion de matière dans certaines zones de l'espace. Cela entraînerait une variation de la masse volumique des particules de fluide lors de l'écoulement, ce qui est incompatible avec l'hypothèse d'incompressibilité.

> On aurait aussi pu dire que le champ de vitesse est à flux conservatif puisque l'on suppose l'écoulement stationnaire et incompressible. La section étant constante d'après l'énoncé, la vitesse $v(r,x)$ est la même à r fixé quelle que soit la valeur de x.

I.A.2.b L'écoulement est unidimensionnel selon $\overrightarrow{e_x}$, par conséquent les lignes de courant sont des droites dans cette direction. Le long d'une telle ligne, entre deux points infiniment proches A et B écartés de $\mathrm{d}x$, on a

$$\mathrm{H(B)} - \mathrm{H(A)} \simeq \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}\,\mathrm{d}x$$

Grâce à la question I.A.1.e, on parvient à

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}\,\mathrm{d}x = \frac{\eta}{\rho g} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \Delta\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$$

En appliquant les simplifications obtenues à la question I.A.2.a et en utilisant l'expression de $\Delta\overrightarrow{v}$ fournie, on obtient

$$\begin{aligned}
-a\mathrm{d}x &= \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\eta}{\rho g} \int_{x}^{x+dx} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v(r)}{\partial r}\right) \overrightarrow{e_x} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \\
&= \frac{\eta}{\rho g}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v(r)}{\partial r}\right) \int_{x}^{x+dx} \mathrm{d}x \\
-a\mathrm{d}x &= \frac{\eta}{\rho g}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v(r)}{\partial r}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$