e3a Maths 2 PSI 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Antoine Sihrener (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Alban Levy (ENS Cachan) et Nicolas Martin (Professeur agrégé).

Ce sujet a pour but le calcul de la somme

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

ainsi que l'étude de la fonction H définie sur $]-1\,;+\infty[$ par

$$\mathrm{H}(x) = \int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t$$

- Dans une partie préliminaire, on étudie la famille de polynômes

  $$\mathrm{P}_n = \frac{1}{2i}\left[(\mathrm{X}+i)^{2n+1} - (\mathrm{X}-i)^{2n+1}\right]$$

  Plus précisément, on va chercher le degré, le coefficient dominant, les racines de P_n et on s'en servira pour calculer la somme $\zeta(2)$. Cette partie n'utilise que des résultats au programme de première année ; elle est abordable, sous réserve d'être à l'aise avec les polynômes.
- Dans la partie 1, on détermine le domaine de définition de H, sa monotonie, sa limite en $+\infty$ et on exprime H comme somme d'une série de fonctions. Les questions ont pour thème les intégrales à paramètres et sont des applications directes du cours.
- La partie 2 permet d'écrire $\mathrm{H}(-1/2)$ sous la forme d'une intégrale. Elle contient des questions classiques d'encadrement d'intégrales et de convergence de séries, mais aussi une question délicate d'interversion série/intégrale.
- Dans la partie 3, on cherche à développer H en série entière au voisinage de 0. Les calculs d'intégrales sont classiques mais justifier la convergence des séries entières requiert des arguments fins.

En conclusion, ce problème relativement long contient énormément de questions proches du cours. Il pourra être utilisé avec profit pendant l'année pour vérifier que les théorèmes relatifs à l'intégration (continuité, dérivabilité sous l'intégrale et convergence dominée) sont maîtrisés.

Indications

Préliminaires

P.1 Se souvenir qu'un réel strictement positif a un argument nul et qu'un réel strictement négatif a un argument égal à π.

P.2.1.2 Utiliser le théorème caractérisant les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$.

P.2.2.1 Appliquer la formule du binôme de Newton et calculer les coefficients des termes X^{2n+1} et X^{2n}.

P.2.2.3 Écrire $i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$.

P.2.2.4 Si z est racine de P_n, en particulier on a $|z-i| = |z+i|$.

P.2.2.5 Écrire $(a+i)^{2n+1} = (a-i)^{2n+1}$, diviser par $(a-i)^{2n+1}$ et faire apparaître des racines de l'unité.

P.2.2.6 Utiliser la méthode de l'arc-moitié, puis les formules d'Euler.

P.2.2.7 Montrer que les coefficients de degré impair sont nuls, et effectuer ensuite un changement d'indice. Se rappeler que $i^{2k} \in \mathbb{R}$ pour tout entier k.

P.2.2.9 Compter les racines de P_n positives, utiliser la stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et compter le nombre de racines de Q_n ainsi obtenues.

P.3 Écrire Q_n sous forme factorisée et donner le coefficient de X^{n+1} de deux façons différentes.

P.4 Utiliser l'égalité $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

P.5 Vérifier que les $k\pi/(2n+1) \in \,]\,0\,;\pi/2\,[$ pour tout $k \in [\![\,1\,;n\,]\!]$, appliquer la question précédente ainsi que le théorème d'encadrement.

Partie 1

I.1 Pour la convergence, comparer à une intégrale de Riemann. Pour la valeur, penser à une intégration par parties.

I.2.1 Si $x > -1$, faire comme dans la question précédente au voisinage de 0, et poser $u = 1 - t$ quand t est au voisinage de 1. Si $x \leqslant -1$, comparer à la fonction inverse.

I.2.2 Prendre $x \leqslant y$ et donner le signe de $H(x) - H(y)$.

I.2.3 Prolonger par continuité en 0 et en 1.

I.2.4 Appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale sur un intervalle de la forme $[\,\alpha\,; +\infty\,[$ pour $\alpha > -1$.

I.2.5 Appliquer le théorème de convergence dominée. Supposer que $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis utiliser la caractérisation séquentielle de la limite.

I.2.6 Écrire $H(x) - H(x+1)$ sous forme d'une seule intégrale et utiliser la question 1.

I.2.7 Utiliser la formule précédente et la continuité de H en 0.

I.2.8.2 Écrire la question 2.6 pour $x+k$ en lieu de x et sommer pour k allant de 0 à $n-1$.

I.2.8.4 Utiliser la question 5 des préliminaires.

Partie 2

II.1 La fonction intégrée est décroissante : sa valeur en $t \in [\,k\,;k+1\,]$ est comprise entre sa valeur en k et sa valeur en $k+1$.

II.2 Sommer les inégalités obtenues à la question précédente pour k allant de 1 à $+\infty$.

II.3.1 Pour $(-1)^n u_n$, appliquer le critère des séries alternées.

II.3.2 Séparer en deux la somme en l'indice N. Utiliser le critère des séries alternées pour majorer le reste et utiliser la question I.2.5.

II.3.3 Faire le changement de variable $t = v^2$ dans l'intégrale définissant $\mathrm{H}(-1/2)$.

Partie 3

III.1.1 Faire une intégration par parties.

III.1.2 Faire une récurrence sur q.

III.2.2 Calculer la somme $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \mathrm{I}_{p,q}$ pour $q \geqslant 1$. Intervertir la somme et l'intégrale.

III.3 Montrer que H est de classe $\mathscr{C}^\infty$ en dérivant sous l'intégrale. Donner $\mathrm{H}^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le rayon de convergence de son développement en série entière est supérieur ou égal à 1 en montrant que la suite $(\mathrm{Z}_k)_{k\geqslant 2}$ est décroissante.

III.4 Montrer que $\mathrm{Z}_k \geqslant 1$ pour tout $k \geqslant 2$.

Préliminaires.

P.1 Calculons le module de u :

$$|u|^2 = u \times \overline{u} = \left(1 + e^{i\theta}\right) \times \left(1 + e^{-i\theta}\right) = 1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta} + 1 = 2 + 2\cos(\theta)$$

Un module étant positif, $|u| = \sqrt{2(1+\cos(\theta))}$. Donnons à présent un argument de u s'il en existe. u a un argument si et seulement si u n'est pas nul. Or, $u = 0$ si et seulement si $e^{i\theta} = -1$, c'est-à-dire si et seulement si $\theta = \pi$ (car $\theta \in [\,0\,;2\pi\,[$). Supposons dans la suite $\theta \neq \pi$. Ainsi, $u \neq 0$ et

$$u = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}$$

Étudions deux cas.

- Si $\theta \in\,]\,0\,;\pi\,[$ alors $\theta/2 \in\,]\,0\,;\pi/2\,[$ et $\cos(\theta/2) > 0$. Par conséquent, 0 est un argument du cosinus, et un argument de u est $\theta/2$.
- Si $\theta \in\,]\,\pi\,;2\pi\,[$ alors $\theta/2 \in\,]\,\pi/2\,;\pi\,[$ et $\cos(\theta/2) < 0$. Ainsi, π est un argument de $\cos(\theta/2)$, et un argument de u est $\pi + (\theta/2)$.

En conclusion,

$$\boxed{|u| = \sqrt{2(1+\cos(\theta))} \qquad \text{et} \qquad \arg(u) = \begin{cases} \theta/2 & \text{si } \theta \in\,]\,0\,;\pi\,[\\ \pi + \theta/2 & \text{si } \theta \in\,]\,\pi\,;2\pi\,[\end{cases}}$$

P.2.1.1 Par définition de P_1, et d'après la formule du binôme de Newton,

$$\mathrm{P}_1 = \frac{1}{2i}\left[\mathrm{X}^3 + 3i\mathrm{X}^2 + 3i^2\mathrm{X} + i^3 - \left(\mathrm{X}^3 - 3i\mathrm{X}^2 + 3i^2\mathrm{X} - i^3\right)\right]$$

En se souvenant que $i^2 = -1$ et $i^3 = -i$, il vient

$$\boxed{\mathrm{P}_1 = \frac{1}{2i}\left[6i\mathrm{X}^2 - 2i\right] = 3\mathrm{X}^2 - 1}$$

De la même façon, en se souvenant que $i^4 = 1$ et $i^5 = i$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_2 &= \frac{1}{2i}[\mathrm{X}^5 + 5i\mathrm{X}^4 + 10i^2\mathrm{X}^3 + 10i^3\mathrm{X}^2 + 5i^4\mathrm{X} + i^5 \\ &\qquad - \left(\mathrm{X}^5 - 5i\mathrm{X}^4 + 10i^2\mathrm{X}^3 - 10i^3\mathrm{X}^2 + 5i^4\mathrm{X} - i^5\right)] \\ &= \frac{1}{2i}\left[10i\mathrm{X}^4 + 20i^3\mathrm{X}^2 + 2i^5\right] \end{aligned}$$

c'est-à-dire
$$\boxed{\mathrm{P}_2 = 5\mathrm{X}^4 - 10\mathrm{X}^2 + 1}$$

P.2.1.2 D'après la question précédente, tous les coefficients étant réels

$$\boxed{\mathrm{P}_1 \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}_2 \in \mathbb{R}_4[\mathrm{X}]}$$

P_1 admet $\pm 1/\sqrt{3}$ comme racines réelles donc n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. De plus, les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ sont les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 de discriminant strictement négatif. Puisque P_2 est de degré 4, il n'est pas irréductible.

$$\boxed{\mathrm{P}_1 \text{ et } \mathrm{P}_2 \text{ ne sont pas irréductibles dans } \mathbb{R}[\mathrm{X}].}$$

P.2.2.1 Appliquons la formule du binôme de Newton :