Centrale Maths 2 PSI 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Céline Chevalier (Enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Juliette Brun-Leloup (Professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (Enseignant-chercheur à l'université).

Le sujet est consacré aux transformations de Fourier et de Laplace d'une fonction intégrable. Il évoque également rapidement leur application à la théorie de l'échantillonnage de Shannon. Ses six parties font appel à la majorité du cours d'analyse de deuxième année ainsi qu'à certains chapitres du cours de probabilités.

- La première partie définit la transformation de Fourier et prouve les principales propriétés utiles pour la suite. Elle se conclut par un exemple, qui permet de manipuler concrètement les objets définis et sera réutilisé dans la partie II.
- La deuxième partie est écrite dans le prolongement de la première et aboutit à la formule d'inversion de Fourier, qui permet de retrouver une fonction à partir de sa transformée de Fourier. Elle se conclut également par un exemple concret.
- La troisième partie considère le cas particulier de la transformée de Fourier à support compact. C'est une partie un peu technique, qui demande en particulier de savoir gérer correctement les majorations.
- Dans la quatrième partie, ce sont les fonctions périodiques qui sont étudiées. C'est une partie difficile et assez calculatoire. Elle demande également de réutiliser les questions précédentes et d'appliquer à bon escient tous les outils classiques d'analyse.
- La cinquième partie donne une application des résultats précédents en évoquant la formule d'échantillonnage de Shannon, qui permet de retrouver un signal à partir d'un échantillon de ce dernier.
- Enfin, la sixième partie, un peu à part, introduit la transformation de Laplace. C'est un peu l'analogue de la première partie. Elle a sans doute été placée ici afin de proposer un peu de probabilités (basées sur des lois de Poisson).

Ce problème est long mais il reste classique et sans grande difficulté (hormis peut-être la partie IV). Il constitue de ce fait un excellent problème de révision d'analyse en vue des écrits. En outre, le rapport de l'épreuve signale qu'il était possible d'obtenir une note « tout à fait honorable » en étant « précis dans la rédaction et l'utilisation des théorèmes d'analyse de seconde année », « sans avoir eu besoin d'aborder chacune des six parties ». Pour les questions nécessitant « l'utilisation de théorèmes spécifiques aux intégrales à paramètre », le jury rappelle que les correcteurs sont « particulièrement attentifs à la présence de l'hypothèse de domination adaptée au contexte particulier » et apprécient « une présentation numérotée des différents points à vérifier ». Enfin, pour les théorèmes utilisés dans leur version « intégrales généralisées », le jury « apprécie de voir rappelées certaines hypothèses spécifiques même si les constatations sont parfois totalement évidentes ».

Indications

Partie I

I.B.1 Utiliser le fait que la fonction sinus est développable en série entière.

I.B.2 Utiliser la 1-périodicité de $x \mapsto |\sin(\pi x)|$.

I.C Appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

I.D.2 Appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre.

Partie II

II.A Vérifier les hypothèses du théorème de convergence dominée.

II.B Raisonner comme à la question II.A .

II.D Combiner les questions II.A, II.B et II.C pour la première égalité. Appliquer ensuite le résultat du début de la question à la fonction h donnée dans l'énoncé.

Partie III

III.A Grâce à l'égalité (**II.1**), se ramener à la question I.D.2 .

III.B Pour $(x_0, x) \in \mathbb{R}^2$, $x_0 \leqslant x$, appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction f entre x_0 et x. Calculer ensuite les dérivées successives de f en exploitant une méthode similaire à la question I.D.2 . Montrer enfin que le reste intégral converge vers 0. Le cas $x \leqslant x_0$ se traite de manière identique.

III.C Appliquer la formule de la question précédente à un réel x tel que $f(x) = 0$. En déduire alors que l'intégrale est nulle, puis que la fonction f est nulle.

Partie IV

IV.A.2 Pour obtenir un équivalent, utiliser des développements limités des termes apparaissant au numérateur.

IV.C Séparer les termes positifs et négatifs de la somme et reconnaître la somme des termes d'une série géométrique. Utiliser ensuite la formule

$$\mathrm{e}^{\,2\mathrm{i}x} - 1 = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}x}(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}x}) = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}x}\, 2\mathrm{i}\, \sin(x)$$

valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

IV.D Exploiter les questions IV.B et IV.C .

IV.E Effectuer une intégration par parties, en posant

$$u(x) = g(x) \qquad \text{et} \qquad v'(x) = \sin((2n+1)\pi x)$$

L'inégalité triangulaire permet ensuite d'obtenir la constante C.

IV.F Utiliser l'égalité des accroissements finis, d'abord appliquée à f, puis à f', en faisant apparaître artificiellement le terme requis. Majorer ensuite les termes obtenus.

IV.G En vue d'appliquer les questions IV.D et IV.E à la fonction h_t donnée dans l'énoncé, définir la fonction g correspondante. Faire attention au fait que la constante C de la question IV.E dépend de g, donc ici de t. Conclure grâce à la question IV.F . Enfin, exprimer les coefficients $c_k(h_t)$ en fonction des coefficients $c_k(f)$ pour tout entier k.

Partie V

V.C Appliquer les résultats de la partie IV à la fonction h en posant $d_k = c_k(h)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

V.D Utiliser l'égalité (**II.1**) puis, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, majorer la quantité

$$\left| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} d_k \psi_k(x) \right|$$

en se servant du résultat de la question V.C .

Partie VI

VI.A.1 Utiliser la caractérisation par les fonctions génératrices.

VI.A.2 C'est une conséquence de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire S_n.

VI.A.4 Appliquer le résultat des questions VI.A.3 puis VI.A.2 à $\varepsilon = |\lambda - x|$.

VI.B Réécrire la conclusion de la question VI.A.4 en utilisant la question VI.A.1 .

VI.C.1 Expliciter la somme demandée et reconnaître la somme de la question VI.B . Justifier alors qu'on peut intervertir la limite et l'intégrale à l'aide du théorème de convergence dominée.

I. Transformation de Fourier

I.A La fonction φ est continue sur $\mathbb{R} \smallsetminus \{-1/2, 1/2\}$ et elle admet une limite finie à gauche et à droite en $-1/2$ et $1/2$. Par suite, elle est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. En outre, elle est nulle en dehors du segment $[\,-1/2\,;1/2\,]$, sur lequel elle est continue. Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. Finalement,

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ appartient à l'ensemble } \mathrm{E}_{\mathrm{cpm}}.}$$

Soit $\xi \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\varphi)(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{e}^{\,-2\pi \mathrm{i} t\xi}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\,-2\pi \mathrm{i} t\xi}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Supposons $\xi \in \mathbb{R}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\varphi)(\xi) &= \left[\frac{\mathrm{e}^{\,-2\pi \mathrm{i} t\xi}}{-2\pi\mathrm{i}\xi}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\,\pi\mathrm{i}\xi} - \mathrm{e}^{\,-\pi\mathrm{i}\xi}}{2\pi\mathrm{i}\xi}\end{aligned}$$

En outre,

$$\mathcal{F}(\varphi)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\,\mathrm{d}t = 1$$

donc

$$\boxed{\forall \xi \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}}$$

I.B.1 La fonction sinus est développable en série entière, de rayon de convergence infini, et son développement vaut

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \sin(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. En posant $y = \pi x$ et en divisant l'égalité précédente par y, il vient

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\pi x)^{2n}$$

Comme cette égalité reste vraie pour $x = 0$, on en déduit que

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La fonction } \psi \text{ est développable en série entière,} \\ \text{de rayon de convergence infini et} \\ \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \psi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\pi x)^{2n}\end{array}}$$

Comme la somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son disque ouvert de convergence, il vient

$$\boxed{\text{La fonction } \psi \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

> Le rapport du jury signale que cette question « portant sur le caractère développable en série entière d'une fonction est très mal traitée ». Pour toutes ces questions sous la forme « montrer qu'il existe », le jury recommande d'« utiliser un brouillon pour faire l'analyse du problème avant d'expliciter clairement l'objet vérifiant la propriété requise ».