Centrale Maths 1 PSI 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Nicolas Weiss (Professeur agrégé) ; il a été relu par Pierre-Elliott Bécue (ENS Cachan) et Sophie Rainero (Professeur en CPGE).

Le sujet adopte plusieurs points de vue (algèbre, topologie, probabilités) pour étudier des propriétés des matrices à coefficients dans $\{0,1\}$.

- La première partie s'intéresse à l'ensemble noté $\mathcal{Y}_n$ des matrices à coefficients dans $[\,0\,;1\,]$ et montre en particulier que les matrices inversibles à coefficients dans $\{0,1\}$ engendrent l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- Dans la deuxième partie, on étudie d'abord un aspect métrique des matrices à coefficients dans $[\,0\,;1\,]$: on peut donner un sens à la distance à $\mathcal{Y}_n$ d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Ensuite, on prouve que le déterminant atteint un maximum sur $\mathcal{Y}_n$, et que ce maximum est atteint pour une matrice à coefficients dans $\{0,1\}$.
- La troisième partie traite du cas particulier des matrices de permutation : ce sont les matrices carrées dont chaque ligne et chaque colonne ne comporte qu'un seul coefficient valant 1, les autres étant nuls ; elles constituent « une représentation du groupe symétrique ».
- Enfin, la quatrième partie envisage le cas de matrices aléatoires à coefficients dans $\{0,1\}$ engendrées par des vecteurs aléatoires ou par remplissage aléatoire, et utilise Python.

Une des originalités de ce sujet est qu'il permettait aux candidats de montrer leur capacité à produire des algorithmes (écrits en Python). Chaque thème est par ailleurs abordé de façon assez classique, même si certaines questions demandent de trouver le bon angle d'attaque. La dernière partie nécessite une compréhension en profondeur de la loi binomiale.

Indications

Partie I

I.A.3 La compacité est hors programme : remplacer le mot « compact » par « fermé et borné ».

I.A.4 Majorer un coefficient bien choisi de $\mathrm{M}v$ avec v vecteur propre.

I.B.1 Étudier directement le spectre de chaque matrice de $\mathscr{X}_2'$.

I.B.2 Procéder par identification pour écrire une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ comme combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{X}_2'$. Généraliser en utilisant l'inclusion de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$

$$\mathrm{M} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{M} \end{pmatrix}$$

Partie II

II.A.2 Utiliser le fait que $\mathcal{Y}_n$ est fermé et borné dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

II.A.3 L'explicitation de M revient à étudier le minimum de la fonction carré sur des segments bien choisis.

II.B.1 Exploiter le résultat des questions I.A.1 et I.A.3.

II.B.2 Réutiliser l'inclusion de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ (voir indication I.B.2).

II.B.3 Si on pose $\alpha_n = \det(\mathrm{M})$, alors on peut établir la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \alpha_{n+1} = -(2\alpha_n + \alpha_{n-1})$$

II.B.4 Isoler le terme où intervient le coefficient $n_{i,j}$ dans le développement de $\det(\mathrm{N})$ suivant la ligne i ou la colonne j.

Partie III

III.B.1 Aucune application d'un ensemble infini dans un ensemble fini ne peut être injective.

III.B.2 Le polynôme $\mathrm{X}^{\mathrm{N}} - 1$ annule P_σ pour un certain $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$.

III.B.3 L'étude des vecteurs propres de $\mathrm{P}_{(12)}$ et $\mathrm{P}_{(123)}$ suffit à conclure ((12) désigne la permutation de $\{1,2,3\}$ qui transforme 123 en 213 et (123) celle qui transforme 123 en 231).

III.B.4.b Expliciter ce qu'implique la non appartenance à D sur les coordonnées d'un vecteur.

III.C Voir indication donnée pour la question III.B.1.

Partie IV

IV.A.3 Séparer les cas $i = j$ et $i \neq j$.

IV.A.4.a Calculer directement les coefficients de $\mathrm{M}(\omega)$.

IV.A.4.b Utiliser le théorème spectral car $\mathrm{M}(\omega)$ est symétrique réelle.

IV.A.4.c Calculer $\mathrm{M}(\omega)^2$.

IV.A.5 Utiliser la question IV.A.4.b.

IV.B.2 Choisir deux valeurs i et j de $\mathrm{N}_1(\Omega)$ et $\mathrm{N}_2(\Omega)$ incompatibles mais possibles.

IV.B.6.b Calculer l'espérance de N après avoir prouvé que

$$\mathrm{P}(\mathrm{N} \leqslant k) = \prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \mathrm{P}(\mathrm{T}_{i,j} \leqslant k)$$

I. Généralités

I.A.1 Chaque matrice de $\mathcal{X}_n$ possède n^2 coefficients, qui peuvent être égaux à 0 ou 1 indépendamment les uns des autres. Ainsi,

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{X}_n \text{ est fini de cardinal } 2^{(n^2)}.}$$

I.A.2 Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $\det(\mathrm{M}) < n!$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathcal{Y}_n$ » est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

- $\underline{\mathscr{P}(2)}$: soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{Y}_2$.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \leqslant ad \leqslant 1 < 2!$$

  car les coefficients a, b, c et d sont compris entre 0 et 1. Donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

- $\underline{\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)}$: supposons la propriété $\mathscr{P}$ vraie au rang n et considérons un élément $\mathrm{M} \in \mathcal{Y}_{n+1}$. Majorons le développement de $\det(\mathrm{M})$ suivant sa première colonne.

$$\det(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \mathrm{M}_{i,1} \widehat{\mathrm{M}}_{i,1} \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} |\mathrm{M}_{i,1}| \left|\widehat{\mathrm{M}}_{i,1}\right|$$

  où $\widehat{\mathrm{M}}_{i,1}$ désigne le mineur correspondant à $\mathrm{M}_{i,1}$. Mais $0 \leqslant \mathrm{M}_{i,1} \leqslant 1$ et $\widehat{\mathrm{M}}_{i,1}$ est le déterminant d'une matrice de $\mathcal{Y}_n$. Aussi par hypothèse de récurrence, on obtient

$$\det(\mathrm{M}) < (n+1) \times 1 \times n! < (n+1)!$$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

$$\boxed{\text{Pour tout } \mathrm{M} \in \mathcal{Y}_n,\ \det(\mathrm{M}) < n!}$$

> L'hypothèse $n \geqslant 2$ faite par le sujet est nécessaire car $\mathcal{Y}_1 = \{\begin{pmatrix} x \end{pmatrix} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ et $\mathcal{X}_1 = \{\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}\}$. Or $\left|1\right| = 1!$

I.A.3

> La compacité est hors programme en PSI. Dans le cas d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, la compacité d'un sous-espace est le fait d'être à la fois partie fermée et bornée de l'espace ambiant.

Soit $(\mathrm{M}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{Y}_n$ qui converge vers $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout couple $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ et tout entier k, on a

$$0 \leqslant (\mathrm{M}_k)_{i,j} \leqslant 1$$

d'où en faisant tendre k vers $+\infty$

$$0 \leqslant \mathrm{M}_{i,j} \leqslant 1$$

c'est-à-dire $\mathrm{M} \in \mathcal{Y}_n$. On vient de montrer que toute suite convergente d'éléments de $\mathcal{Y}_n$ converge dans $\mathcal{Y}_n$, soit

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{Y}_n \text{ est fermé dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Tous les coefficients des matrices de $\mathcal{Y}_n$ étant compris entre 0 et 1, toute norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est majorée sur $\mathcal{Y}_n$. Ainsi

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{Y}_n \text{ est borné dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Soient M et N des éléments de $\mathcal{Y}_n$ et $t \in [\,0\,;1\,]$. Pour tout $(i,j) \in [\![\,1\,;n\,]\!]^2$, on a

$$(t\mathrm{M} + (1-t)\mathrm{N})_{i,j} = t\,\mathrm{M}_{i,j} + (1-t)\,\mathrm{N}_{i,j}$$

Puisque $\mathrm{M}_{i,j}$, $\mathrm{N}_{i,j}$, t et $1-t$ appartiennent à $[\,0\,;1\,]$, il vient directement l'encadrement

$$0 \leqslant t\,\mathrm{M}_{i,j} + (1-t)\,\mathrm{N}_{i,j} \leqslant t + (1-t) = 1$$

Ceci étant vrai pour tout (i,j), la matrice $t\,\mathrm{M} + (1-t)\,\mathrm{N}$ appartient bien à $\mathcal{Y}_n$, et

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{Y}_n \text{ est convexe dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

I.A.4 Soient $v = {}^t(v_1, \cdots, v_n)$ un vecteur propre de $\mathrm{M} \in \mathcal{Y}_n$ associé à la valeur propre λ, et $i_0 \in [\![\,1\,;n\,]\!]$ un entier tel que $|v_{i_0}| = \max\{|v_1|, \cdots, |v_n|\}$. On a

$$(\mathrm{M}v)_{i_0} = \lambda v_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{M}_{i_0,j} v_j$$

Il n'y a plus qu'à majorer en valeur absolue cette dernière somme.

$$\begin{aligned}
|\lambda|\,|v_{i_0}| &\leqslant \left|\sum_{j=1}^{n} \mathrm{M}_{i_0,j} v_j\right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{M}_{i_0,j} v_j| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} |v_j| && \text{car } \mathrm{M} \in \mathcal{Y}_n \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} |v_{i_0}| && \text{par définition de } i_0 \\
|\lambda|\,|v_{i_0}| &\leqslant n\,|v_{i_0}|
\end{aligned}$$

Comme tout vecteur propre est non nul, on a nécessairement $|v_{i_0}| > 0$, ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\text{Toute valeur propre complexe } \lambda \text{ de } \mathrm{M} \in \mathcal{Y}_n \text{ vérifie } |\lambda| \leqslant n.}$$

L'entier n est valeur propre d'une matrice de $\mathcal{Y}_n$, comme on peut le constater à l'aide de l'égalité qui suit.

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{L'entier } n \text{ est valeur propre de } \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.}$$

I.B.1 Le déterminant de toute matrice M de $\mathcal{X}_2$ est à valeur dans $\{-1, 0, 1\}$. Il ne peut être nul que si les produits des deux diagonales de M sont égaux car

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$