Mines Physique 2 PC 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Henri Lastakowski (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Guillaume Maimbourg (ENS Cachan) et Tom Morel (Professeur en CPGE).

Ce sujet est divisé en deux parties indépendantes. La première est consacrée à différents phénomènes thermiques dans le sol, la seconde à la description de l'effet tunnel.

- La première partie débute par l'étude de la propagation d'ondes thermiques dans le sol. Elle nécessite une bonne maîtrise du cours afin d'aboutir rapidement à l'équation de la chaleur. On étudie alors la propagation d'une onde plane sinusoïdale dont l'amplitude décroît exponentiellement avec la profondeur. On s'intéresse ensuite à l'influence des effets géophysiques en prenant en compte les apports thermiques issus des désintégrations radioactives dans la croûte terrestre, et du flux thermique issu du manteau. C'est l'étude des effets de relief qui conclut cette partie : on prend en compte les variations de température en surface.
- Il est nécessaire de bien connaître les bases de la physique quantique pour aborder la seconde partie. Au menu : fonction d'onde, équation de Schrödinger et solutions en ondes stationnaires dans le cas simple d'un potentiel uniforme. L'utilisation des résultats précédents permet d'étudier l'effet tunnel à proximité d'une marche de potentiel. Enfin, cerise sur le gâteau, on montre que l'effet tunnel est à l'origine de la radioactivité α chez certains éléments chimiques.

La partie I propose des problèmes de diffusion assez classiques, proches de certains exercices de cours. La partie II est entièrement dédiée à la mécanique quantique, plus particulièrement à l'effet tunnel. Plusieurs calculs sont relativement fastidieux à mener et nécessitent une grande rigueur.

Indications

Partie I

2 Contrairement à ce que dit l'énoncé, la quantité d'énergie traversant la surface $\mathrm{d}\mathcal{S}$ pendant $\mathrm{d}t$ est $\mathrm{d}\phi_{\mathrm{Q}}\,\mathrm{d}t$.

4 Être attentif aux orientations du vecteur surface sur les parois du système.

8 Injecter la solution proposée dans l'équation de la chaleur et séparer partie imaginaire et partie réelle.

10 Comparer ω pour des variations journalières et annuelles de température.

11 Les variations d'énergie interne, nulles en régime stationnaire, sont dues aux flux thermiques échangés et aux désintégrations des éléments radioactifs.

15 Chercher une solution de la forme $\mathrm{T}(x,z) = \mathrm{T_S} + \mathrm{T}_1 t_x(x) t_z(z)$.

16 Pour une équation linéaire, la solution est la somme de solutions issues des différentes contributions.

Partie II

23 Remarquer que la solution de l'équation de Schrödinger est analogue à une onde plane progressive harmonique de forme $\underline{f}(x,t) = \underline{f_0}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})}$.

28 Simplifier au maximum l'expression de la fonction d'onde avant de mener ce calcul, et remarquer que l'on peut négliger l'influence de la dépendance temporelle. Remarquer également que le calcul dans la zone III est identique à celui dans la zone I.

30 En dehors du noyau X, le potentiel $\mathrm{V}(x)$ traduit l'interaction électrostatique entre le noyau Y et la particule α.

31 Remarquer que pour parvenir en $x + \mathrm{d}x$, la particule doit parvenir en x puis franchir une barrière de potentiel de largeur $\mathrm{d}x$ et de hauteur $\mathrm{V}(x)$.

33 $\mathrm{T} \ll 1$, par conséquent la probabilité de franchir la barrière au bout de N tentatives est approximativement égale à $\mathrm{N} \times \mathrm{T}$. Si le système contient un nombre $\mathrm{M}(t)$ de particules radioactives à l'instant t, combien se désintègrent pendant $\mathrm{d}t$? Quelle est alors la loi d'évolution de $\mathrm{M}(t)$?

De la physique dans le tunnel de Fréjus

I. Température dans le tunnel de Fréjus

1 La valeur moyenne de la fonction cosinus étant nulle, la moyenne temporelle de la température extérieure en $z = 0$ est égale à θ_0. Donc

$$\boxed{\langle \mathrm{T}(0,t) \rangle = \theta_0 = 0\ °\mathrm{C}}$$

Avec l'expression de $\mathrm{T}(0,t)$,

$$\boxed{\mathrm{T}_{\mathrm{max}} = \theta_0 + \mathrm{T}_0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}_{\mathrm{min}} = \theta_0 - \mathrm{T}_0}$$

On peut raisonnablement supposer un écart de températures de l'ordre de 30 °C entre l'hiver et l'été, ce qui correspond à

$$\boxed{\mathrm{T}_0 = 15\ °\mathrm{C}}$$

2 Notons $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{S}}$ le vecteur surface élémentaire. Le vecteur densité de flux thermique $\overrightarrow{j_\mathrm{Q}}$ est défini de sorte que

$$\boxed{\mathrm{d}\phi_\mathrm{Q} = \overrightarrow{j_\mathrm{Q}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{S}}}$$

D'après cette expression, **la densité de flux thermique j_Q est homogène à une puissance surfacique**.

> L'énoncé définit à tort le flux thermique comme l'énergie traversant la surface $\mathrm{d}\mathcal{S}$ pendant $\mathrm{d}t$. En toute rigueur, cette énergie est égale à $\mathrm{d}\phi_\mathrm{Q}\ \mathrm{d}t$. Notons également que le flux ainsi défini correspond au flux thermique traversant la surface $\mathrm{d}\mathcal{S}$ dans le sens du vecteur $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{S}}$.

3 En notant κ la conductivité thermique du sol, la loi de Fourier s'écrit

$$\boxed{\overrightarrow{j_\mathrm{Q}} = -\kappa\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{T}}$$

La loi de Fourier est applicable lorsque

- le gradient thermique n'est **pas trop élevé** ;
- le gradient thermique **ne varie pas trop rapidement** ;
- le milieu est **isotrope**.

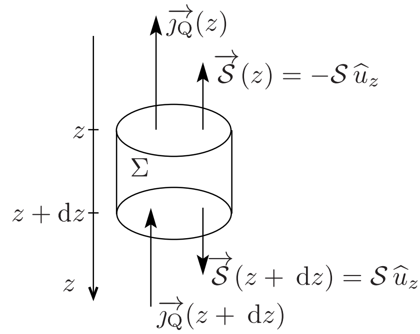
Par ailleurs, notons Θ la dimension d'une température. L'opérateur gradient étant homogène à l'inverse d'une longueur, il vient

$$[\kappa] = \frac{[\text{puissance}]}{\mathrm{L}^2} \times \frac{\mathrm{L}}{\Theta}$$

Or
$$[\text{puissance}] = \frac{[\text{énergie}]}{\mathrm{T}} = \mathrm{M.L^2.T^{-3}}$$

Ainsi
$$\boxed{[\kappa] = \mathrm{M.L.T^{-3}}.\Theta^{-1}}$$

4 Le système est invariant par translation suivant x et y, la température ne dépend spatialement que de z, et on peut poser $\overrightarrow{j_\mathrm{Q}} = j_\mathrm{Q}\widehat{u}_z$. Le système Σ constitué de la tranche de surface $\mathcal{S}$ comprise entre les altitudes z et $z + \mathrm{d}z$ ne reçoit des transferts thermiques qu'à travers les surfaces supérieure et inférieure. L'énergie élémentaire mise en jeu ici s'écrit



$$\delta\mathrm{Q} = -\phi_\mathrm{sortant}\,\mathrm{d}t$$

avec ϕ_sortant le flux sortant. Or, d'après la question 2,

$$\phi_\mathrm{sortant} = \int_\Sigma \overrightarrow{j_\mathrm{Q}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{S}}$$

avec $\overrightarrow{\mathcal{S}}$ le vecteur surface sortant (voir schéma). Entre t et $t + \mathrm{d}t$, le système reçoit de l'énergie à travers la surface située en z et celle située en $z + \mathrm{d}z$. Le transfert thermique total reçu entre t et $t + \mathrm{d}t$ vaut

$$\delta\mathrm{Q} = -\left(\overrightarrow{j_\mathrm{Q}}(z,t) \cdot \overrightarrow{\mathcal{S}}(z) + \overrightarrow{j_\mathrm{Q}}(z + \mathrm{d}z, t) \cdot \overrightarrow{\mathcal{S}}(z + \mathrm{d}z)\right)\,\mathrm{d}t$$

D'après le schéma, $\qquad \delta\mathrm{Q} = -\left(j_\mathrm{Q}(z + \mathrm{d}z, t) - j_\mathrm{Q}(z,t)\right)\mathcal{S}\,\mathrm{d}t$

Finalement
$$\boxed{\delta\mathrm{Q} = -\frac{\partial j_\mathrm{Q}}{\partial z}\,\mathrm{d}z\,\mathcal{S}\,\mathrm{d}t}$$

5 Il est nécessaire d'introduire ici un système de taille mésoscopique. En effet, la température étant inhomogène à l'échelle de la croûte terrestre, il est impossible d'introduire une température globale pour l'ensemble de la croûte. Par conséquent, **le système doit être petit comparé aux échelles de variation de température**. En outre, les lois de la thermodynamique ne sont applicables que pour des systèmes comprenant un très grand nombre de particules. Pour pouvoir définir une température, **le système doit donc être grand comparé à l'échelle atomique**.

6 Le système, défini à la question 4, n'échange pas d'énergie sous forme de travail avec l'extérieur. Le premier principe appliqué à la tranche de solide entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit donc

$$\mathrm{dU} = \delta\mathrm{Q}$$

D'après la question 4,
$$\boxed{\mathrm{dU} = -\frac{\partial j_\mathrm{Q}}{\partial z}\,\mathrm{d}z\,\mathcal{S}\,\mathrm{d}t}$$

Par ailleurs, le sol est considéré comme une phase incompressible, indilatable. La capacité thermique de la tranche comprise entre z et $z + \mathrm{d}z$ vaut $c_\mathrm{s}\rho_\mathrm{s}\mathrm{dV}$ avec $\mathrm{dV} = \mathcal{S}\mathrm{d}z$. La variation d'énergie interne entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit

$$\mathrm{dU} = c_\mathrm{s}\rho_\mathrm{s}\mathrm{dVdT} = c_\mathrm{s}\rho_\mathrm{s}\mathrm{dV}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}\,\mathrm{d}t$$

Par conséquent,
$$\boxed{\mathrm{dU} = c_\mathrm{s}\rho_\mathrm{s}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}\,\mathrm{d}z\,\mathcal{S}\,\mathrm{d}t}$$