X/ENS Maths PC 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Thierry Limoges (ENS Cachan) ; il a été relu par Walter Appel (Professeur en CPGE) et Antoine Sihrener (Professeur en CPGE).

Cette épreuve d'analyse et probabilités comporte trois parties. Dans chacune, on cherche des lois de probabilités maximisant une fonction donnée. Ces fonctions représentent des entropies avec ou sans contraintes. Les maximiser revient à chercher une distribution de probabilité correspondant à un état stable.

- Dans la première partie, on fait une étude topologique d'une partie Σ_N de $\mathbb{R}^N$, puis on s'intéresse au maximum d'une fonction H_N définie sur celle-ci. La fonction H_N est appelée entropie de Shannon et mesure l'opposé de la quantité d'information disponible sur un système pouvant être dans un des N états possibles avec une loi de probabilité donnée. En particulier, elle représente, à un facteur près, la quantité d'information contenue dans un message utilisant un alphabet à N lettres, chacune apparaissant avec une certaine probabilité. L'utilisation des probabilités se fait essentiellement sur des ensembles finis, puis on fait une brève étude pour des probabilités sur $\mathbb{N}^*$.
- Dans la deuxième partie, on maximise une autre fonction en utilisant cette fois du calcul différentiel. Cette fonction est obtenue à partir de H_N en y ajoutant une contrainte fixée $f \in \mathbb{R}^N$ pondérée par la loi de probabilité.
- Enfin, on cherche le minimum d'une fonction L dans la troisième partie, en faisant beaucoup de calcul différentiel, afin de le relier au maximum de H_N sur une partie de Σ_N. On dispose d'une variable aléatoire X, de loi inconnue, et de mesures des espérances de $g_k(X)$ pour une famille $(g_k)_{k\in[\![1\,;\,d]\!]}$ de fonctions, pouvant représenter des simulations. Parmi toutes les probabilités de Σ_N, certaines sont candidates à être la loi de X, car cohérentes avec ces espérances. Le minimum de L est cherché parmi celles-ci. On utilise les propriétés élémentaires de l'espérance (linéarité, positivité) ainsi que les idées du cours sur la variance et la covariance pour obtenir les résultats.

Ce sujet de 27 questions est de difficulté progressive. Il faut du temps pour le prendre en main, ce qui n'est pas facile le jour du concours, mais constitue un bon entraînement pendant l'année. Les outils employés sont très variés : topologie dans $\mathbb{R}^N$, développements limités, calcul différentiel, probabilités et un peu d'algèbre linéaire.

Indications

- I.2 Utiliser l'image réciproque par une application continue pour le caractère fermé. Revenir à la définition pour les autres propriétés.
- I.4a Effectuer un développement limité en t de $\varphi(a+t)$ et $\varphi(b-t)$. Distinguer les cas $a > 0$ et $a = 0$.
- I.4b Montrer que le maximum est atteint pour la loi uniforme en raisonnant par l'absurde et en utilisant la question 4a.
- I.5b Calculer $\mathrm{H}_\infty(p)$ pour la suite p de terme général suggéré par l'énoncé, décalé de 1 pour commencer à $i = 1$. Choisir β pour obtenir le résultat voulu.
- I.6 Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à une variable aléatoire bien choisie.
- II.7 Montrer que la borne supérieure est un maximum en invoquant la topologie de Σ_N.
- II.8a Remplacer p_1 par t, p_2 par $p_2 - t$, et faire un développement limité de la différence $\mathrm{J}_f(p^{(t)}) - \mathrm{J}_f(p)$ lorsque t tend vers 0.
- II.9b Montrer que pour t suffisamment petit, les coefficients de $\widetilde{p}$ sont positifs.
- II.9c Expliciter la formule de $(\mathrm{J}_f \circ \widetilde{p})\,(t)$ pour t suffisamment petit, puis dériver et montrer que $(\mathrm{J}_f \circ \widetilde{p})'\,(0) = 0$.
- II.10 Montrer que $\Sigma_\mathrm{N}(f)$ contient un unique élément, calculable avec la question 9c.
- II.11 Calculer $\mathrm{F}'(\beta)$, puis séparément $\mathrm{H}_\mathrm{N}(p(\beta))$, pour $p(\beta)$ l'unique élément de l'ensemble $\Sigma_\mathrm{N}(\beta f)$ avec sa formule de la question 10.
- II.12 Utiliser les relations de comparaison.
- III.13 Écrire la formule de l'espérance en utilisant la formule du transfert. Pour la positivité, écrire ce nombre comme une somme et utiliser la linéarité puis la positivité de l'espérance.
- III.14a Écrire la formule de l'espérance trouvée à la question 13.
- III.14b Regarder l'image par $\widetilde{\mathrm{M}}$ du vecteur θ augmenté du terme $-c$.
- III.15 Calculer les dérivées partielles avec les fonctions composées.
- III.16 Utiliser le résultat de la question 15 et vérifier la condition d'appartenance à $\Sigma_\mathrm{N}(\overline{g}, g)$ pour $p(\theta)$.
- III.17 Calculer les dérivées partielles secondes avec les fonctions composées.
- III.18a Calculer la dérivée et la dérivée seconde par rapport à t. Utiliser la question 14b pour montrer que la dérivée seconde ne s'annule pas.
- III.18b Raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe deux points critiques distincts.
- III.19a Montrer que $\mathrm{H}_\mathrm{N}(p') \leqslant \mathrm{L}(\theta)$ pour tout $p' \in \Sigma_\mathrm{N}(\overline{g}, g)$ et $\theta \in \mathbb{R}^d$, en utilisant la question 10.
- III.19b Montrer que l'égalité $\mathrm{H}_\mathrm{N}(p') = \mathrm{H}_\mathrm{N}(p(\theta_*))$ n'est vérifiée que pour $p' = p(\theta_*)$, car c'est l'unique élément de $\Sigma_\mathrm{N}(f(\theta_*))$.

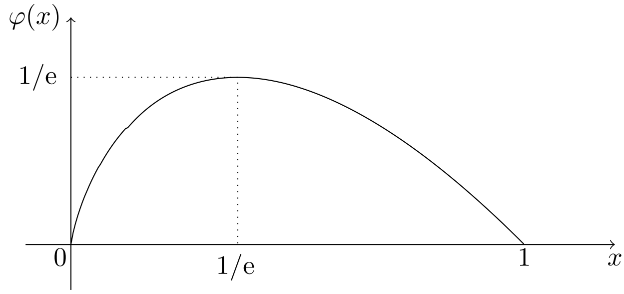
Partie I

1 La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ comme produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur cet intervalle. De plus, pour $t > 0$, $\varphi(t) = -t\ln t \xrightarrow[t\to 0]{} 0 = \varphi(0)$. Ainsi,

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est continue sur } [\,0\,;+\infty\,[\text{ et de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

Pour $t > 0$, $\varphi'(t) = -\ln t - t\dfrac{1}{t} = -\ln t - 1 \xrightarrow[t\to 0]{} +\infty$. D'où

$$\boxed{\lim_{t\to 0^+} \varphi'(t) = +\infty}$$



2 Notons ψ la fonction

$$\psi\colon \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathrm{N}} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ p = (p_1, p_2, \ldots, p_{\mathrm{N}}) & \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} p_i \end{cases}$$

C'est une application continue car linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie. L'ensemble $\psi^{-1}(\{1\})$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue, donc est fermé. De plus, pour tout $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N}$, les ensembles $\{(p_1, p_2, \ldots, p_{\mathrm{N}})\ ;\ p_i \geqslant 0\}$ sont fermés, car ce sont les images réciproques du fermé $[\,0\,;+\infty\,[$ par la i^{e} projection, continue. Comme l'ensemble

$$\Sigma_{\mathrm{N}} = \psi^{-1}(\{1\}) \cap \bigcap_{i=1}^{\mathrm{N}} \{(p_1, p_2, \ldots, p_{\mathrm{N}})\ ;\ p_i \geqslant 0\}$$

est une intersection de fermés, il est fermé.

> On pourrait également utiliser la caractérisation séquentielle d'un fermé : si $(p^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Σ_{N} telle que
>
> $$p^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} p \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$$
>
> ce qui revient à dire, puisque $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ est de dimension finie, que
>
> $$\left(p^{(n)}{}_1, p^{(n)}{}_2, \ldots, p^{(n)}{}_{\mathrm{N}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (p_1, p_2, \ldots, p_{\mathrm{N}}) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$$
>
> alors, par passage à la limite, $\sum\limits_{i=1}^{\mathrm{N}} p_i = 1$ et $p_i \geqslant 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N}$, et ainsi $p \in \Sigma_{\mathrm{N}}$.

Par définition,

$$\Sigma_{\mathrm{N}} \subset \left\{(p_1, p_2, \ldots, p_{\mathrm{N}})\ ;\ \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} |p_i| = 1\right\}$$

C'est la sphère de centre 0 et de rayon 1 pour la norme 1 de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, ce qui prouve l'inclusion de Σ_{N} dans une boule de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, c'est-à-dire que Σ_{N} est une partie bornée de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$.

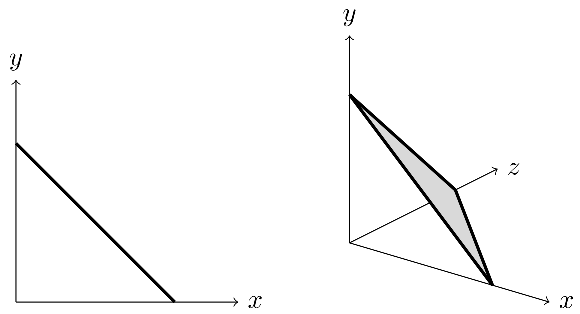
> Le résultat est également valable pour la norme infinie. Dans $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, toutes les normes sont équivalentes, on peut donc choisir la norme 1 pour le démontrer.

Soient $(p,p') \in {\Sigma_{\mathrm{N}}}^2$ et $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. Montrons que $\lambda p + (1-\lambda)p' \in \Sigma_{\mathrm{N}}$. Tout d'abord,

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} (\lambda p_i + (1-\lambda)p'_i) = \lambda \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} p_i + (1-\lambda)\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} p'_i = \lambda + (1-\lambda) = 1$$

De plus, tous les coefficients $\lambda p_i + (1-\lambda)p'_i$ sont positifs, car somme et produits de réels positifs. Ainsi, $\lambda p + (1-\lambda)p'$ est un élément de Σ_{N}. Ceci étant vrai pour tout $\lambda \in [\,0\,;1\,]$ et tout $(p,p') \in {\Sigma_{\mathrm{N}}}^2$, la partie Σ_{N} est convexe. Finalement,

$$\boxed{\text{La partie } \Sigma_{\mathrm{N}} \text{ est fermée, bornée et convexe dans } \mathbb{R}^{\mathrm{N}}.}$$

> Géométriquement, soit $\mathrm{P_N}$ le polyèdre de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ dont les $(\mathrm{N}+1)$ sommets sont $(0,0,\ldots,0)$, $(1,0,\ldots,0)$, $(0,1,0,\ldots,0)\ldots$, $(0,\ldots,0,1)$, c'est-à-dire l'enveloppe convexe de ces points soit le plus petit ensemble convexe qui les contient. Alors, Σ_{N} est la face de $\mathrm{P_N}$ qui n'est pas incluse dans un hyperplan $\{x_i = 0\}$ pour $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N}$ donc c'est l'enveloppe convexe des N derniers points qui définissent $\mathrm{P_N}$ ci-dessus. Dans $\mathbb{R}^2$, c'est le segment entre $(1,0)$ et $(0,1)$; dans $\mathbb{R}^3$, c'est le triangle, et son intérieur, de sommets $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$.
>
> 
>

3 Pour tout $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N}$, la projection

$$\mu_i : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \;p \longmapsto p_i \end{cases}$$

est linéaire donc continue. Comme φ est continue, la composée $\varphi \circ \mu_i$ est continue. La fonction $\mathrm{H_N}$ est la somme de ces fonctions pour $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N}$, c'est donc une fonction continue.

Soit $i \in [\![\,1\,;\mathrm{N}\,]\!]$. Si $p_i = 0$, alors $\varphi(p_i) = 0$. Sinon, on a $0 < p_i \leqslant 1$, donc $\ln(p_i) \leqslant 0$ et ainsi $\varphi(p_i) = -p_i \ln(p_i) \geqslant 0$. Dans les deux cas, $\varphi(p_i) \geqslant 0$. La fonction $\mathrm{H_N}$ est une somme de fonctions positives sur Σ_{N}, donc est positive sur Σ_{N}. Finalement,

$$\boxed{\text{La fonction } \mathrm{H_N} \text{ est continue et positive sur } \Sigma_{\mathrm{N}}.}$$