# Centrale Maths 2 PC 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tristan Poullaouec (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Céline Chevalier (Enseignant-chercheur à l'université) et Vincent Puyhaubert (Professeur en CPGE).

Ce problème d'algèbre linéaire est composé de quatre parties.

- La première porte sur l'étude de deux opérateurs linéaires de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, l'opérateur de translation et celui de différence. On détermine en particulier la matrice du premier opérateur dans la base canonique et son inverse. Elles permettent d'établir une formule d'inversion pour des suites liées par une formule ressemblant à celle du binôme de Newton.
- La deuxième partie, plus courte, applique les résultats de la première au dénombrement des surjections de $[\![ 1\,;p ]\!]$ sur $[\![ 1\,;n ]\!]$.
- La troisième reprend l'étude de l'opérateur de différence dans une base adaptée, la famille des polynômes de Hilbert. On en déduit quelques propriétés des polynômes à valeurs entières sur $\mathbb{Z}$.
- La dernière partie, plus courte, étend l'opérateur de différence aux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et propose une application arithmétique.

Hormis quelques questions purement combinatoires de la deuxième partie, qui peuvent effrayer les personnes insensibles aux charmes discrets du dénombrement, le sujet ne comporte pas de difficulté notable et n'utilise que des techniques très classiques d'algèbre linéaire. Les questions sont de plus bien détaillées et de difficulté progressive. Enfin, ce problème porte uniquement sur le cours de première année et peut donc parfaitement être traité en fin de PCSI.

# Indications

## Partie I

I.A.1 Utiliser la formule du binôme de Newton pour faire apparaître le terme de plus haut degré du polynôme $\tau(\mathrm{P})$.

I.A.3 Pour tout $j \in [\![ 1\,;n+1 ]\!]$, calculer les coefficients du polynôme $\tau(\mathrm{P}_j)$ dans la base $(\mathrm{P}_k)_{k\in[\![ 1\,;n+1 ]\!]}$ grâce à la formule du binôme de Newton.

I.A.4 Utiliser le résultat de la question I.A.3.

I.A.5 Montrer par le calcul que $\tau$ est bijective.

I.A.6 Procéder comme à la question I.A.3.

I.A.8 Utiliser les résultats des questions I.A.7 et I.A.6.

I.A.9 Se servir à nouveau de la formule du binôme de Newton.

I.B.1 Déterminer le terme dominant de $\delta\left(\mathrm{X}^k\right)$ pour tout $k \in [\![ 0\,;d ]\!]$, puis utiliser la linéarité de $\delta$ pour trouver celui de $\delta(\mathrm{P})$.

I.B.2 Commencer par déterminer le noyau à l'aide de la question précédente.

I.B.3 Trouver d'abord, en utilisant les questions I.B.1 et I.B.2, le degré de $\delta^k(\mathrm{P})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout polynôme non nul P.

I.B.5 Utiliser les résultats des questions I.B.3, I.B.4 et I.A.2.

I.B.6.b Se servir des questions I.B.4. et I.B.6.a.

I.B.6.d Considérer la matrice dans la base $\{1, \mathrm{X}\}$ de l'endomorphisme induit par $u$.

I.B.7.b Commencer par trouver qui peut être $d$. Utiliser ensuite la question I.B.7.a.

## Partie II

II.A.3 Le plus simple est de voir comment construire une surjection de $[\![ 1\,;n+1 ]\!]$ sur $[\![ 1\,;n ]\!]$, en raisonnant sur les antécédents des éléments de $[\![ 1\,;n ]\!]$.

II.B.2 Commencer par compter le nombre d'applications de $[\![ 1\,;p ]\!]$ dans $[\![ 1\,;n ]\!]$ dont l'image a pour cardinal $k \in [\![ 1\,;n ]\!]$.

II.B.3 Penser aux relations (I.1) et (I.2).

II.C Utiliser les résultats des questions II.B.3, II.A.2 et II.A.3.

## Partie III

III.A.3 On pourra reconnaître les matrices de $\tau$ dans des bases différentes.

III.A.4 Établir d'abord l'expression du polynôme $\delta^k(\mathrm{H}_\ell)$ pour $(k,l) \in [\![ 0\,;n ]\!]^2$.

III.A.5 Utiliser les résultats des questions III.A.1 et III.A.4.

III.B.1 Appliquer la question III.A.5 ainsi que les résultats de la partie I pour $n = 3$.

III.B.3 On pourra rechercher la solution particulière sous la forme d'une fonction polynomiale, en gardant en tête le résultat de la question précédente.

III.C.1 Faire apparaître des coefficients binomiaux à l'aide de changements d'indice.

III.C.4 Utiliser les résultats des questions III.C.3, III.A.5 et III.C.2.

III.C.5 Se servir de la question précédente pour l'implication directe. Pour montrer que la réciproque est fausse, prendre un polynôme de degré 2.

**Partie IV**

IV.A.2 Procéder comme à la question I.B.4.

IV.B.1 Utiliser la décomposition de $k$ en facteurs premiers.

IV.B.2 Se servir de la définition de $\alpha$.

IV.C.2 Commencer par déterminer l'expression de ${f_\alpha}^{(n)}$.

IV.C.3 Utiliser les résultats des questions IV.A.4, IV.C.1, IV.C.2 et IV.B.3 pour étudier la suite $(v_x)_{x\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $v_x = {f_\alpha}^{(n)}(x + y_n)$.

# I. L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

**I.A.1** Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ un polynôme non nul. Il s'écrit $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k \mathrm{X}^k$, avec $a_k \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in [\![ 0\,; d ]\!]$, $d = \deg(\mathrm{P}) \in \mathbb{N}$ et $a_d = \mathrm{cd}(\mathrm{P}) \neq 0$. Il en découle que

$$\tau(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) = \sum_{k=0}^{d} a_k (\mathrm{X}+1)^k = a_d(\mathrm{X}+1)^d + \mathrm{R}_1$$

où $\deg(\mathrm{R}_1) < d$. De plus, on a d'après la formule du binôme de Newton

$$(\mathrm{X}+1)^d = \sum_{\ell=0}^{d} \binom{d}{\ell} \mathrm{X}^\ell = \mathrm{X}^d + \mathrm{R}_2$$

avec $\deg(\mathrm{R}_2) < d$ également. De ce fait,

$$\tau(\mathrm{P}) = a_d \mathrm{X}^d + \mathrm{R}_1 + a_d \mathrm{R}_2 = a_d \mathrm{X}^d + \mathrm{R}$$

où le polynôme $\mathrm{R} = \mathrm{R}_1 + a_d \mathrm{R}_2$ vérifie $\deg(\mathrm{R}) < d$. Comme $a_d \neq 0$, ceci montre que $\tau(\mathrm{P})$ est un polynôme non nul de degré $d$ et de coefficient dominant $a_d$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Pour tout } \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \text{ non nul, } \deg(\tau(\mathrm{P})) = \deg(\mathrm{P}) \text{ et } \mathrm{cd}(\tau(\mathrm{P})) = \mathrm{cd}(\mathrm{P}).}$$

**I.A.2** Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Considérons la propriété $\mathscr{P}$ définie pour $k \in \mathbb{N}$ par

$$\mathscr{P}(k) : \text{« } \tau^k(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+k) \text{ »}$$

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie puisque $\tau^0(\mathrm{P}) = \mathrm{P} = \mathrm{P}(\mathrm{X}+0)$.
- $\underline{\mathscr{P}(k) \Longrightarrow \mathscr{P}(k+1)}$ : supposons que la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang $k \in \mathbb{N}$. D'après la proposition $\mathscr{P}(k)$, on a $\tau^k(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+k)$ d'où
$$\tau^{k+1}(\mathrm{P}) = \tau(\tau^k(\mathrm{P})) = \tau(\mathrm{P}(\mathrm{X}+k)) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+k+1)$$
Ainsi, la proposition $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
- <u>Conclusion</u> : d'après le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui signifie que
$$\boxed{\forall\, \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \qquad \tau^k(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+k)}$$

**I.A.3** Par convention, on pose $\dbinom{m}{p} = 0$ dès que $p > m$.

Pour déterminer cette matrice M, il faut calculer les images par $\tau$ des différents éléments de la base $(\mathrm{P}_k)_{k \in [\![ 1\,; n+1 ]\!]}$. Soit $j \in [\![ 1\,; n+1 ]\!]$. Comme $\mathrm{P}_j = \mathrm{X}^{j-1}$, on déduit de la formule du binôme de Newton que

$$\tau(\mathrm{P}_j) = (\mathrm{X}+1)^{j-1} = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} \mathrm{X}^k = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} \mathrm{P}_i = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{j-1}{i-1} \mathrm{P}_i$$

en utilisant le changement d'indice $i = k+1$ et la convention rappelée plus haut. Les coefficients de la matrice M de $\tau$ dans la base $(\mathrm{P}_k)_{k \in [\![ 1\,; n+1 ]\!]}$ sont donc

$$\boxed{\forall\, (i,j) \in [\![ 1\,; n+1 ]\!]^2 \qquad \mathrm{M}_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}}$$

On reconnaît ici les coefficients binomiaux apparaissant dans le triangle de Pascal. En fait, M est tout simplement la transposée de ce triangle.