# X/ENS Physique MP 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Valentin Raban (ENS Lyon) ; il a été relu par Tom Morel (Professeur en CPGE) et Louis Salkin (Professeur en CPGE).

Le sujet porte sur le couplage optomécanique entre une cavité Fabry-Perot et le champ électromagnétique qu'elle contient. La source du couplage est la force de pression de radiation de ce champ. Les deux parties de l'épreuve sont de longueur et de difficulté inégales.

- La première partie aborde le calcul du champ électrique dans la cavité. Les premières questions sont classiques et constituent une bonne illustration de l'utilisation des facteurs de transmission/réflexion. Cette approche conduit naturellement à relier la sélectivité de la cavité à ses pertes énergétiques et permet d'aboutir à une équation dynamique pour le champ.
- Dans la deuxième partie, l'un des miroirs est rendu mobile et attaché à un ressort. La force de pression de radiation, qui tend à pousser le miroir, s'oppose alors à la force de rappel du ressort. De cette compétition résultent des positions d'équilibre qui font l'objet des dernières questions du sujet.

Le sujet n'est pas particulièrement long, mais certaines questions de la fin de la deuxième partie sont peu guidées et nécessitent d'y consacrer un temps conséquent. Celles-ci reposent notamment sur une analyse de courbes qu'il faut savoir tracer sans l'aide de la calculatrice, interdite ici. Elles restent néanmoins les questions les plus intéressantes.

Remarquons par ailleurs que la plupart des résultats intermédiaires sont donnés dans l'énoncé, ce qui évite de rester bloqué.

# Indications

## Partie 1

3 Écrire les champs comme provenant de la réflexion/transmission d'autres champs.

6 L'intensité est proportionnelle au module du champ électrique au carré.

7 Écrire $\mathcal{E}_{\rm II} = \mathcal{E}_+ + \mathcal{E}_-$ puis utiliser les expressions établies à la question 4.

8 Pour déterminer la nature du champ lorsque $\mathrm{R} = 1$, commencer par écrire la condition de réflexion totale sur $(\mathrm{M}_1)$, puis calculer le champ dans la cavité.

9 Introduire $\omega = \omega_n + \delta\omega$ dans l'expression de $\Theta$, puis utiliser le développement limité $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$ valable pour $x \ll 1$.

10 Faire l'analogie avec les filtres en électrocinétique.

15 L'énoncé n'est pas clair ici. Il faut introduire un $\mathrm{d}t$ différent du $\Delta t$ des questions précédentes.

17 Remplacer $\Delta\omega_{1/2}$ par son expression en fonction de $\gamma$.

18 Commencer par dériver l'expression (17) de l'énoncé par rapport au temps. Écrire ensuite $\omega = \omega_{\rm c} + \delta\omega$ et utiliser la question 17 pour exprimer $\delta\omega\,\mathcal{E}_+$.

## Partie 2

21 Substituer L par $\mathrm{L}(t)$ dans l'expression de $\omega_{\rm c}$.

24 L'équation (19) reste valable.

26 Calculer la quantité de mouvement totale reçue par le miroir. La force qui s'exerce sur lui est alors $\mathrm{F}_{\rm pr} = \mathrm{d}p_{\rm tot}/\mathrm{d}t$.

27 La puissance électromagnétique est l'intégrale surfacique du vecteur de Poynting.

30 Utiliser l'équation (22) de l'énoncé.

33 La question précédente permet d'écrire $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t = 0$.

34 Utiliser les expressions (23), (24) et (26) de l'énoncé.

37 Les positions d'équilibre correspondent aux points d'intersection entre la représentation graphique de F et la droite $y = \mathrm{A}\,\xi$.

38 La courbe associée à F traduit la force de pression de radiation tandis que la droite $y = \mathrm{A}\,\xi$ représente la force de rappel du ressort.

39 Tracer F, puis chercher dans quelles conditions une droite passant par l'origine intersecte trois fois F.

41 Utiliser les résultats des questions 4 et 17. La puissance est proportionnelle au module du champ électrique au carré.

42 Faire varier la pente A de la droite, et regarder comment évoluent les points d'intersection avec F.

# Optomécanique en cavité

## I. Cavité résonante à longueur fixée

**1** L'énergie est proportionnelle au carré du champ électrique : R et T sont donc respectivement les coefficients de réflexion et de transmission **en énergie** des miroirs. La relation $R + T = 1$ traduit ainsi **la conservation de l'énergie de l'onde.**

**2** Puisqu'il n'y a pas de source de champ dans la zone III, le champ $E_{III}$ ne provient que du champ $E_+$ transmis à travers $(M_2)$ : il est par conséquent **progressif** tout comme $E_+$.

**3** Le champ $E_+$ résulte de la transmission de $E_i$ à travers $(M_1)$ et de la réflexion de $E_-$ sur la face intérieure de $(M_1)$. On a donc en $z = 0$ :

$$\mathcal{E}_+\ e^{i\omega t} = \tau\ \mathcal{E}_i\ e^{i\omega t} - \rho\ \mathcal{E}_-\ e^{i\omega t}$$

soit $$\boxed{\mathcal{E}_+ = \tau\ \mathcal{E}_i - \rho\ \mathcal{E}_-}$$

Le champ $E_-$ provient uniquement de la réflexion de $E_+$ sur le miroir $(M_2)$. En $z = L$,

$$\mathcal{E}_-\ e^{i\omega(t+L/c)} = -\rho\ \mathcal{E}_+\ e^{i\omega(t-L/c)}$$

donc $$\boxed{\mathcal{E}_- = -\rho\ \mathcal{E}_+\ e^{-2i\omega L/c}}$$

Enfin, $E_t$ a pour origine la transmission de $E_+$ à travers $(M_2)$, que l'on écrit

$$\mathcal{E}_t\ e^{i\omega(t-L/c)} = \tau\ \mathcal{E}_+\ e^{i\omega(t-L/c)}$$

d'où $$\boxed{\mathcal{E}_t = \tau\ \mathcal{E}_+}$$

**4** Substituons $\mathcal{E}_-$ dans l'expression de $\mathcal{E}_+$ :

$$\mathcal{E}_+ = \tau\ \mathcal{E}_i + \rho^2\ \mathcal{E}_+\ e^{-2i\omega L/c}$$

Par conséquent, $$\mathcal{E}_+ = \frac{\tau}{1 - \rho^2\ e^{-2i\omega L/c}}\ \mathcal{E}_i$$

Puisque $\tau = \sqrt{T}$ et $\rho = \sqrt{R}$, on aboutit à

$$\boxed{\mathcal{E}_+ = \frac{\Theta(\omega)}{\sqrt{T}}\,\mathcal{E}_i \qquad \text{avec} \qquad \Theta(\omega) = \frac{T}{1 - R\ e^{-2i\omega L/c}}}$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{\begin{cases} \mathcal{E}_- = -\sqrt{R}\ e^{-2i\omega L/c}\ \mathcal{E}_+ = -\ \Theta(\omega)\ \sqrt{\dfrac{R}{T}}\ e^{-2i\omega L/c}\ \mathcal{E}_i \\[2ex] \mathcal{E}_t = \sqrt{T}\ \mathcal{E}_+ = \Theta(\omega)\,\mathcal{E}_i \end{cases}}$$

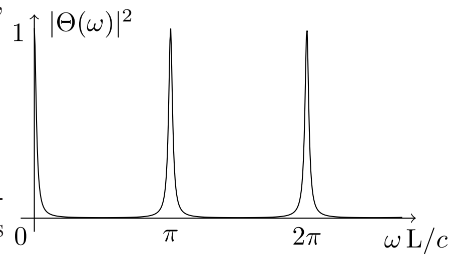
**5** Calculons $|\Theta(\omega)|^2$ :

$$|\Theta(\omega)|^2 = \frac{T^2}{\left(1 - R\ e^{-2i\omega L/c}\right)\left(1 - R\ e^{2i\omega L/c}\right)} = \frac{T^2}{1 + R^2 - 2\,R\cos\left(2\,\omega\,L/c\right)}$$

donc $$|\Theta(\omega)|^2 = \frac{T^2}{(1-R)^2 + 2\,R\,(1 - \cos\left(2\,\omega\,L/c\right))}$$

Puisque $1 - \cos(2a) = 2\sin^2(a)$ et $\mathrm{R} + \mathrm{T} = 1$, on en conclut

$$\boxed{|\Theta(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \dfrac{4\,\mathrm{R}}{\mathrm{T}^2}\,\sin^2\left(\dfrac{\omega\,\mathrm{L}}{c}\right)}}$$




Pour $\mathrm{R} = 0{,}9$ on a $4\mathrm{R}/\mathrm{T}^2 \gg 1$ donc la fonction $|\Theta(\omega)|^2$ ne prend des valeurs appréciables qu'au voisinage des annulations du sinus.

**6** La fonction $|\Theta|^2$ est maximale lorsque le sinus s'annule, soit

$$\boxed{\omega_n = \frac{n\,\pi\,c}{\mathrm{L}} \qquad \text{avec} \qquad n \in \mathbb{N}^*}$$

> Cette condition de quantification peut se réécrire $2\,\mathrm{L} = n\,\lambda$ : le chemin optique correspondant à un aller-retour dans la cavité doit valoir un nombre entier de fois la longueur d'onde. C'est une condition d'interférences constructives.

Pour cette famille de pulsations, $|\Theta(\omega_n)|^2 = 1$. Par ailleurs, puisque l'intensité I est proportionnelle au carré du champ, $\mathrm{I} = \alpha\,|\mathcal{E}|^2$. En utilisant la relation (14),

$$\mathrm{I_t} = \alpha\,|\mathcal{E}_\mathrm{t}|^2 = \alpha\,|\Theta(\omega_n)|^2\,|\mathcal{E}_\mathrm{i}|^2 = \mathrm{I_i}$$

$$\boxed{\text{L'intensité incidente est donc intégralement transmise pour les pulsations } \omega_n.}$$

**7** L'intensité $\mathrm{I_{II}}(z)$ s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathrm{I_{II}}(z) &= \alpha\,|\mathcal{E}_\mathrm{II}|^2 \\
&= \alpha\,|\mathcal{E}_+\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\omega(t-z/c)} + \mathcal{E}_-\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\omega(t+z/c)}\,|^2 \\
&= \alpha\,|\mathcal{E}_+\,\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\omega z/c} + \mathcal{E}_-\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\omega z/c}\,|^2 \qquad \text{car } |\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\omega t}|^2 = 1 \\
\mathrm{I_{II}}(z) &= \alpha\,|\mathcal{E}_+|^2 + \alpha\,|\mathcal{E}_-|^2 + \alpha\,\mathcal{E}_+\mathcal{E}_-^*\,\mathrm{e}^{\,-2\mathrm{i}\omega z/c} \\
&\qquad + \alpha\,\mathcal{E}_-\mathcal{E}_+^*\,\mathrm{e}^{\,2\mathrm{i}\omega z/c}
\end{aligned}$$

Remplaçons $\mathcal{E}_-$ et $\mathcal{E}_+$ par les formules établies à la question 4 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I_{II}}(z) = \alpha\,\frac{|\Theta|^2}{\mathrm{T}}|\mathcal{E}_\mathrm{i}|^2 + \alpha\,\frac{\mathrm{R}\,|\Theta|^2}{\mathrm{T}}|\mathcal{E}_\mathrm{i}|^2 - \alpha\,\frac{\sqrt{\mathrm{R}}\,|\Theta|^2}{\mathrm{T}}\,\mathrm{e}^{\,2\mathrm{i}\omega\mathrm{L}/c}\,\mathrm{e}^{\,-2\mathrm{i}\omega z/c}\,|\mathcal{E}_\mathrm{i}|^2 \\
-\alpha\,\frac{\sqrt{\mathrm{R}}\,|\Theta|^2}{\mathrm{T}}\,\mathrm{e}^{\,-2\mathrm{i}\omega\mathrm{L}/c}\,\mathrm{e}^{\,2\mathrm{i}\omega z/c}\,|\mathcal{E}_\mathrm{i}|^2
\end{aligned}$$

soit $$\boxed{\mathrm{I_{II}}(z) = \frac{|\Theta(\omega)|^2}{\mathrm{T}}\left\{1 + \mathrm{R} - 2\sqrt{\mathrm{R}}\cos\left(\frac{2\omega}{c}(z-\mathrm{L})\right)\right\}\mathrm{I_i}}$$

On identifie
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\omega,z) &= 1 + \mathrm{R} - 2\sqrt{\mathrm{R}}\cos\left(\frac{2\omega}{c}(z-\mathrm{L})\right) \\
&= (1-\sqrt{\mathrm{R}})^2 + 2\sqrt{\mathrm{R}}\left\{1 - \cos\left(\frac{2\omega}{c}(z-\mathrm{L})\right)\right\}
\end{aligned}$$

Finalement, $$\boxed{\mathcal{L}(\omega,z) = (1-\sqrt{\mathrm{R}})^2 + 4\sqrt{\mathrm{R}}\sin^2\left(\frac{\omega}{c}(z-\mathrm{L})\right)}$$