X Maths B MP 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Walter Appel (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Sophie Rainero (Professeur en CPGE) et Guillaume Batog (Professeur en CPGE).

Le but de ce problème est d'étudier une marche aléatoire à pas toujours positifs, c'est-à-dire la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles d'une série $\sum \mathrm{X}_n$ de variables aléatoires positives, indépendantes et identiquement distribuées. Notamment, on s'intéresse à la variable aléatoire $\mathrm{N}(a,b)$ égale au nombre de sommes partielles se trouvant entre a et b, et on montre que, sous certaines hypothèses, les sommes partielles ont asymptotiquement tendance à l'équirépartition, c'est-à-dire que $\mathrm{N}(x, x+\ell)$ tend vers $\ell/\mathrm{E}(\mathrm{X})$ quand x tend vers $+\infty$.

- Dans la première partie, on établit, par des procédés élémentaires (mais pas toujours faciles !) de probabilités, une majoration uniforme de $\mathrm{E}\big(\mathrm{N}(a,b)\big)$. Cette partie est abordable dès que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev a été vue en cours.
- Dans la deuxième partie, on définit la fonction

$$\mathrm{L}g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}\big(g(x-\mathrm{S}_k)\big)$$

  (où g est positive, bornée et à support borné), qui a la propriété d'être égale à $\mathrm{E}\big(\mathrm{N}(x-\ell,x)\big)$ lorsque $g = \mathbb{1}_{[\,0\,;\,\ell\,]}$. On montre alors que cette fonction est l'unique solution bornée, nulle sur $\mathbb{R}^-$, de l'équation fonctionnelle

$$f(x) = g(x) + \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_1 = x_i\right)\, f(x-x_i) \qquad \text{(E)}$$

  où $\{x_i \mid i\in\mathbb{N}\}$ est l'ensemble des valeurs prises par X. On vérifie enfin que, si g est de classe $\mathscr{C}^1$, alors $\mathrm{L}g$ est bornée et uniformément continue, grâce à la majoration uniforme de la partie 1.
- L'ensemble des valeurs prises par l'ensemble des S_n étant stable par addition, la troisième partie est consacrée à des propriétés générales de tels ensembles. Cette partie ne nécessite que très peu de connaissances, mais requiert de réfléchir calmement. Elle est indépendante des deux parties précédentes.
- La quatrième partie est consacrée à l'étude asymptotique de $\mathrm{E}\big(\mathrm{N}(x,x+\ell)\big)$ quand $x\to+\infty$, dans le cas où $\mathrm{P}(\mathrm{X}\in d\mathbb{Z}) < 1$ pour tout réel $d>0$. Elle demande de bien avoir en tête l'ensemble des résultats démontrés, et fait appel à de nombreux raisonnements fins d'analyse (en revanche, il n'y a pas de probabilités, sauf à une seule question). Les dernières questions sont plus délicates, d'autant que certaines imprécisions ou erreurs d'énoncé pouvaient perturber les candidats.

Voici donc un problème à la fois intéressant, original (très original), long (très, très long) et difficile, mêlant intimement la théorie des probabilités à celle des séries de fonctions.

Indications

Première partie

1a Les trois propriétés se montrent de manière élémentaire, sans que les deux dernières se « déduisent » des premières.

1b Se ramener à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

2 Écrire le membre de droite comme une double somme et invoquer le théorème de Fubini pour les familles positives pour permuter ces sommes.

3a On peut utiliser l'inégalité de Markov pour la variable positive $\mathrm{e}^{\ell - \mathrm{S}_n}$.

3b Utiliser le résultat de la question 2.

Deuxième partie

4b Utiliser le fait que $\mathrm{E}\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} g(x-\mathrm{S}_k)\right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}\big(g(x-\mathrm{S}_k)\big)$

La démonstration de cette propriété est assez délicate.

4c Utiliser la majoration $0 \leqslant g \leqslant \|g\|_\infty \mathbb{1}_{[\,0\,;\,\mathrm{K}\,]}$.

5 Utiliser la formule de transfert pour $\varphi(\mathrm{X},\mathrm{Y})$.

6a Montrer que $\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i\, f_n(x-x_i) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{E}\big(g(x-\mathrm{X}-\mathrm{S}_k)\big)$

puis le fait que $\mathrm{S}_k + \mathrm{X}$ a même loi que S_{k+1}.

6b La convergence normale de la série des $x \mapsto p_i\, f_n(x-x_i)$ autorise l'usage du théorème de la double limite.

7a Procéder par récurrence en utilisant la question 5.

7b Vérifier que $\big|h(x)\big| \leqslant \mathrm{E}\big(\,|h(x-\mathrm{S}_n)|\,\big) \leqslant \|h\|_\infty\, \mathrm{P}\,(\mathrm{S}_n \leqslant x)$.

8c Écrire $f(x)$ sous la forme d'une double somme et invoquer le théorème de Fubini. Enfin, appliquer le résultat de la question 4b pour $g = \mathbb{1}_{[\,0\,;\,\mathrm{K}\,]}$.

9c Appliquer la même méthode qu'en 8c pour montrer que f' est bornée, et celle du 9b pour l'uniforme continuité.

Troisième partie

10a Légère erreur d'énoncé, il faut prendre $n \in \mathbb{N}^*$.

11b Tout élément de $]\, na+kd\,;na+(k+1)d\,[$ est à distance strictement inférieure à $d/2$ d'une des bornes de l'intervalle.

11c Choisir le plus petit entier n_0 tel que $n_0 d > a$, et montrer que

$$n_0 a + (n_0-1)d \leqslant (n_0+1)a < n_0 a + n_0 d$$

11d Soit $x \in \Lambda$. Noter $n = \lfloor x/a \rfloor$, $r = x - na$ et $k = \lfloor r/d \rfloor$, et montrer

$$na + kd \leqslant x < na + (k+1)d$$

Utiliser ensuite la question 11b quand x est suffisamment grand ; dans le cas général, considérer un multiple de x suffisamment grand.

Quatrième partie

13a Montrer que $\quad h(0) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} q_i\, h(-y_i) \leqslant \sum\limits_{i\neq j} q_i\, h(0) + q_j\, h(-x)$

13b L'énoncé comporte ici une petite erreur, puisque Λ_{X} contient le nombre 0, valeur à supprimer de la définition de Λ_{X}.

13c Appliquer la question 12b à $x \mapsto h(-x) - h(0)$.

13d Montrer que h atteint son minimum sur $\mathbb{R}^-$ en un point a, et appliquer les questions 13a et 13c à $x \longmapsto -h(a+x)$.

14c Dans la formule $\quad \xi_k(t) = g'(t+t_k) + \sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i\, \xi_k(t-x_i)$

remarquer que la série converge normalement et appliquer le théorème de la double limite. Appliquer ensuite les résultats des questions 13a à 13d.

14d Utiliser le théorème d'intégration d'une suite de fonctions uniformément convergente sur un intervalle de largeur L, et en déduire que $|c|\,\mathrm{L} \leqslant 2\|f\|_\infty$.

15a L'énoncé comporte quelques petites erreurs : notamment, il semble préférable de montrer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\big(\mu(t+\ell) - \mu(t)\big)\ \mathrm{d}t = 0$$

ce qui est confirmé par la version du sujet mise en ligne par l'École polytechnique, et qui diffère sur quelques points du sujet distribué en réalité.

15b S'il existe x et ℓ tels que $\mu(x+\ell) - \mu(x) \neq 0$, construire une fonction g positive, nulle sauf sur un voisinage de x, et de classe $\mathscr{C}^1$, pour obtenir une contradiction.

16b Nouvelle petite erreur : faire comme si g_0 était élément de $\mathscr{F}$.

17 Pour toute suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant $(\mathscr{P})$, on sait que $f(t_k) \to \ell = \dfrac{1}{\mathrm{E}(\mathrm{X})}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$. Montrer par l'absurde que f tend vers ℓ en l'infini en construisant une suite de terme général $f(t_k)$ qui converge vers une autre limite (on n'oubliera pas que l'image de f est bornée et que de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente).

18 Appliquer le résultat de la question 17 à la fonction $g = \mathbb{1}_{[\,0\,;\,\ell\,]}$.

I. Première partie

> Signalons, avant de commencer, que l'énoncé ne précise pas que les x_i sont deux à deux distincts, mais que c'est bien l'hypothèse naturelle à prendre ici.

1a Remarquons avant toute chose que, pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $\big(\mathrm{S}_n(\omega)\big)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante, car les X_n sont à valeurs dans $]\,0\,;+\infty\,[$.

Soit $\ell \geqslant 0$ fixé ; soit n un entier naturel.

Soit ω un élément de Ω tel que $\mathrm{N}(0,\ell)(\omega) = n+1$. Alors les $n+1$ indices k tels que $0 \leqslant \mathrm{S}_k(\omega) \leqslant \ell$ ne peuvent être que les premiers de la suite, c'est-à-dire que

$$0 = \mathrm{S}_0(\omega) < \mathrm{S}_1(\omega) < \cdots < \mathrm{S}_n(\omega) \leqslant \ell < \mathrm{S}_{n+1}(\omega) \qquad (\mathbf{1})$$

Notamment, $\omega \in (\mathrm{S}_n \leqslant \ell < \mathrm{S}_{n+1})$.

Réciproquement, si $\omega \in (\mathrm{S}_n \leqslant \ell < \mathrm{S}_{n+1})$, les inégalités ($\mathbf{1}$) ont lieu, ce qui montre que $\mathrm{N}(0,\ell)(\omega) = n+1$.

$$\boxed{\big(\mathrm{N}(0,\ell) = n+1\big) = (\mathrm{S}_n \leqslant \ell < \mathrm{S}_{n+1})}$$

De la même façon, l'inégalité $\mathrm{S}_n(\omega) \leqslant \ell$ implique qu'il y a au moins $n+1$ sommes partielles entre 0 et ℓ ; réciproquement, dire qu'il y a au moins $n+1$ sommes partielles entre 0 et ℓ implique que la somme d'indice n est dans l'intervalle $[\,0\,;\ell\,]$.

$$\boxed{(\mathrm{S}_n \leqslant \ell) = \big(\mathrm{N}(0,\ell) \geqslant n+1\big)}$$

Enfin, si la somme partielle d'indice n vérifie $\mathrm{S}_n \geqslant \ell$, alors, par stricte croissance, toutes les sommes partielles d'indice supérieur à $n+1$ sont strictement plus grandes que ℓ ; ainsi $\mathrm{N}(0,\ell)$ vaut, au maximum, $n+1$.

$$\boxed{(\mathrm{S}_n \geqslant \ell) \subset \big(\mathrm{N}(0,\ell) \leqslant n+1\big)}$$

1b Soit $n \geqslant 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Par linéarité de l'espérance, $\mathrm{E}(\mathrm{S}_n) = n\,\mathrm{E}(\mathrm{X}) = nm$. (Rappelons en effet que deux variables ayant même loi ont même espérance et, plus généralement, mêmes moments.) Par indépendance mutuelle, les variances s'ajoutent :

$$\mathrm{V}(\mathrm{S}_n) = \mathrm{V}(\mathrm{X}_1) + \cdots + \mathrm{V}(\mathrm{X}_n) = n\,\mathrm{V}$$

Majorons $\quad \mathrm{P}(\mathrm{S}_n \leqslant n(m-\varepsilon)) = \mathrm{P}(\mathrm{S}_n - mn \leqslant -n\varepsilon) \leqslant \mathrm{P}\big(\,|\mathrm{S}_n - mn| \geqslant n\varepsilon\big)$

Puisque S_n admet une variance, utilisons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathrm{P}\big(\,|\mathrm{S}_n - mn| \geqslant n\varepsilon\big) = \mathrm{P}\Big(\big|\mathrm{S}_n - \mathrm{E}(\mathrm{S}_n)\big| \geqslant n\varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathrm{V}(\mathrm{S}_n)}{(n\varepsilon)^2} = \frac{\mathrm{V}}{n\,\varepsilon^2}$$

Conclusion :
$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{S}_n \leqslant n(m-\varepsilon)) \leqslant \frac{\mathrm{V}}{n\,\varepsilon^2}}$$

2 D'une part, la variable aléatoire Y admet une espérance, c'est-à-dire que la série positive $\sum\, n\ \mathrm{P}\,(\mathrm{Y} = n)$ converge et a pour somme $\mathrm{E}(\mathrm{Y})$. D'autre part, la série

$$\sum_{k\geqslant 1} \mathbb{1}_{[\,0\,;\,n\,]}(k)\ \mathrm{P}(\mathrm{Y} = n)$$