Mines Maths 2 MP 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Céline Chevalier (Enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Guillaume Batog (Professeur en CPGE) et Sophie Rainero (Professeur en CPGE).

L'objectif de ce problème est la démonstration du théorème taubérien de Hardy-Littlewood-Karamata : si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels positifs tels que pour tout $x > 0$, la série $\sum \alpha_n \mathrm{e}^{-nx}$ converge vers un réel noté $f_\alpha(x)$, alors

$$\lim_{x\to 0} (x f_\alpha(x)) = \ell \in [\,0\,;+\infty\,[\qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \alpha_n = \ell$$

Ce problème est composé de quatre parties indépendantes :

- La partie A calcule l'intégrale
$$\mathrm{K} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$
C'est un classique des intégrales à paramètre, avec toutefois des calculs à mener astucieusement dans les questions 4 et 6.
- La partie B peut être vue comme une seconde partie préliminaire, qui aboutit à l'équivalent
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$$
Il s'agit d'un problème typique de séries de fonctions, sans difficulté particulière.
- La partie C s'intéresse aux suites de terme général $\alpha_n = \mathbb{1}_{\mathrm{A}}(n)$ où A est une partie de $\mathbb{N}$. Si l'on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = \mathrm{Card}\,(\{k \in \mathrm{A} \mid k \leqslant n\})$, on prouve que
$$\forall x > 0 \qquad f_\beta(x) = \frac{f_\alpha(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}}$$
On s'intéresse ensuite au cas particulier des entiers s'écrivant comme somme de deux carrés non nuls. Cette partie demande de l'aisance dans la manipulation des cardinaux et surtout de l'habitude pour reconnaître des produits de Cauchy.
- Si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite intervenant dans le théorème taubérien, la partie D établit le résultat intermédiaire suivant (sans le donner) :
$$\lim_{x\to 0} x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \mathrm{e}^{-nx} \psi\left(\mathrm{e}^{-nx}\right) = \ell \int_0^1 \psi(t)\,\mathrm{d}t$$
que l'on démontre successivement pour une fonction ψ polynomiale, puis continue, puis en escalier, puis continue par morceaux sur $[\,0\,;1\,]$. On prouve enfin le théorème recherché que l'on applique ensuite pour établir que le nombre de décompositions d'un entier en somme de deux carrés vaut, en moyenne, $\pi/4$.

Ce problème est dans l'ensemble difficile : outre qu'il demande de bien maîtriser les séries de fonctions et les intégrales à paramètre (ce qui en fait un bon problème de révision sur ces sujets), certaines questions techniques sont ouvertes (la formule n'est pas fournie) et bloquantes pour la suite (on ne peut plus avancer sans trouver la formule).

Indications

Partie A

2 Montrer que la fonction F est définie sur I.

3 Vérifier les hypothèses de dérivation des intégrales à paramètre.

4 Pour $x \in \mathrm{I}$, calculer $\mathrm{F}(x)$ à l'aide d'une intégration par parties, en posant

$$a(u) = \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u+x} \qquad \text{et} \qquad b'(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$$

Reconnaître alors $\mathrm{F}(x)$ et $\mathrm{F}'(x)$ dans le terme obtenu, en factorisant par

$$\frac{2\mathrm{e}^{-u}}{(u+x)\sqrt{u}}$$

dans la nouvelle intégrale, et en écrivant

$$u\left(1+\frac{1}{u+x}\right) = (u+x) + (1-x) - \frac{x}{u+x}$$

5 Calculer la dérivée de G puis intégrer le résultat obtenu.

6 Pour la limite en 0, effectuer le changement de variable $t = u/x$ et vérifier les hypothèses de la version continue du théorème de convergence dominée. Calculer alors l'intégrale obtenue avec le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

Partie B

7 Montrer que les séries de fonctions convergent normalement sur $[\,a\,;+\infty\,[$ pour tout $a > 0$.

8 Utiliser une comparaison série-intégrale puis effectuer le changement de variable affine $u = tx$.

9 Utiliser le théorème de comparaison série-intégrale du cours avec la fonction $\beta : x \mapsto 1/\sqrt{x+1}$.

10 Chercher un équivalent du terme général. Reconnaître ensuite un produit de Cauchy en écrivant $\mathrm{e}^{-nx} = \mathrm{e}^{-kx}\mathrm{e}^{-(n-k)x}$.

11 Exprimer $g(x)$ en fonction de $h(x)$ et majorer le reste de l'égalité par un $\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(h(x))$.

Partie C

12 Si A est infini, montrer que $\mathrm{I_A} = \,]\,0\,;+\infty\,[$.

13 Écrire

$$\mathrm{Card}\,(\mathrm{A}(n)) = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

et reconnaître un produit de Cauchy dans la somme. Remarquons que l'hypothèse $\mathrm{A} \in \mathrm{S}$ est inutile dans cette question.

14 Utiliser l'inégalité $0 \leqslant \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 0$.

15 Écrire $v(n) = \mathrm{Card}\,\big(\{k \in [\![\,1\,;n-1\,]\!] \,|\, (k, n-k) \in {\mathrm{A}_1}^2\}\big)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et reconnaître une nouvelle fois un produit de Cauchy.

Partie D

16 Il y a une petite erreur d'énoncé : l'application L est en fait à valeurs dans l'espace vectoriel des fonctions de $]\,0\,;+\infty\,[$ dans $\mathbb{R}$.

18 Montrer que $$\forall p \in \mathbb{N} \qquad \Delta(e_p) = \frac{\ell}{p+1} = \ell \int_0^1 e_p(t)\,\mathrm{d}t$$

et étendre le résultat aux polynômes par linéarité. Appliquer ensuite le théorème de Weierstrass ainsi que le théorème de double limite pour prouver que cette égalité reste vraie pour les fonctions continues.

19 Après avoir calculé $\Delta(g_-)$ et $\Delta(g_+)$ grâce à la question précédente, montrer que $\mathbb{1}_{[\,0\,;\,a\,]} \in \mathrm{E}_1$ à partir de l'égalité $g_- \leqslant \mathbb{1}_{[\,0\,;\,a\,]} \leqslant g_+$ et de la question 16. Prouver que les fonctions indicatrices $\mathbb{1}_{\{a\}}$, $\mathbb{1}_{[\,a\,;\,b\,]}$, $\mathbb{1}_{[\,a\,;\,b\,[}$, $\mathbb{1}_{]\,a\,;\,b\,]}$ et $\mathbb{1}_{]\,a\,;\,b\,[}$ sont également dans E_1 et en déduire que les fonctions en escalier sont dans E_1. Conclure comme à la question 18.

20 Appliquer la question 19.

21 Considérer la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la partie C, prouver qu'elle vérifie les hypothèses de la partie D, puis utiliser la question 19 en remarquant que

$$\mathrm{Card}\,(\mathrm{A}(n)) = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Exploiter ensuite la question 15 pour justifier que la suite $(v(n))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie elle aussi les hypothèses de la partie D.

A. Une intégrale à paramètre

1 La fonction $\psi\colon u \mapsto \mathrm{e}^{-u}/\sqrt{u}$ est continue sur I comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, donc intégrable sur tout segment. Il reste à étudier l'intégrabilité de la fonction ψ en 0 et en $+\infty$.

- D'une part, $$0 \leqslant \psi(u) \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{u^{1/2}}$$
  qui est intégrable en 0 puisque $1/2 < 1$.
- D'autre part, $$u^2\psi(u) = u^{3/2}\mathrm{e}^{-u} \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0$$
  par croissances comparées, donc $\psi(u) \underset{u\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(u^{-2})$, puis ψ est intégrable en $+\infty$ par comparaison avec une intégrale de Riemann ($2 > 1$).

Finalement, $\boxed{\text{La fonction } \psi\colon u \mapsto \mathrm{e}^{-u}/\sqrt{u} \text{ est intégrable sur I.}}$

2 Définissons la fonction $$\varphi_x\colon \begin{cases} \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} \end{cases}$$

et examinons les différents cas.

- Si $x < 0$, la fonction φ_x n'est pas définie en $-x$. Elle n'est donc pas continue par morceaux sur I, elle ne peut donc pas être intégrable sur I.
- Si $x > 0$, la fonction φ_x est continue sur I en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,
  $$\forall u > 0 \qquad 0 \leqslant \varphi_x(u) \leqslant \frac{1}{x}\psi(u)$$
  et $u \mapsto (1/x)\psi(u)$ est intégrable sur I d'après la question 1. Ainsi, par comparaison des fonctions positives, la fonction φ_x est également intégrable sur I.
- Si $x = 0$, $$0 \leqslant \varphi_x(u) \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{u^{3/2}}$$
  qui n'est pas intégrable en 0 car $3/2 > 1$ (intégrale de Riemann). Par comparaison des intégrales positives, φ_x n'est donc pas intégrable en 0.

Par suite, $\boxed{\text{La fonction F est définie sur I.}}$

> Remarquons que la question 3 donne un élément de réponse au problème posé ici, en demandant de prouver que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

3 Définissons la fonction
$$\varphi\colon \begin{cases} \mathrm{I}\times\mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,u) \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} \end{cases}$$

et vérifions les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

- Soit $x \in \mathrm{I}$. La fonction $u \mapsto \varphi(x,u) = \varphi_x(u)$ est continue et intégrable sur I d'après la question précédente.