CCP Maths 1 MP 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Thomas Ragel (ENS Lyon) ; il a été relu par Damien Garreau (ENS Ulm) et Sophie Rainero (Professeur en CPGE).

L'épreuve comporte deux exercices et un problème indépendants.

Dans le premier exercice, on cherche les solutions développables en série entière d'une équation différentielle.

Dans le second exercice, on étudie les lois conjointes et marginales de deux variables aléatoires. On fait intervenir la notion de famille sommable.

Le problème est consacré à la fonction digamma définie par $\Psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ pour $x \in \,]\,0\,;+\infty\,[$, où Γ, fonction qui généralise la factorielle, est définie par

$$\forall x \in \,]\,0\,;+\infty\,[\qquad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$$

Il est divisé en 9 questions principales que l'on peut regrouper en 4 parties :

- Les questions III.1 et III.2 sont des préliminaires. On y étudie quelques propriétés élémentaires de la fonction Γ et de la série harmonique. On calcule notamment la dérivée de Γ au moyen du théorème de dérivation sous le signe intégrale.
- Dans les questions III.3, III.4 et III.5, on cherche à exprimer la fonction Γ sous différentes formes afin d'en déduire une expression de Ψ dans la question III.6. La question III.3 fait appel au théorème de convergence dominée.
- Les questions III.7 et III.8 sont les plus difficiles du sujet. Elles permettent de caractériser la fonction digamma. Ces deux questions illustrent bien le raisonnement d'analyse-synthèse.
- Le problème se termine par une question de probabilités. On s'intéresse au tirage de deux boules avec une remise qui dépend de la première boule tirée. L'expression de la fonction digamma trouvée à la question III.7.b permet de simplifier l'expression des probabilités obtenues.

Ce sujet fait appel à la majeure partie du programme d'analyse de spé, notamment les grands théorèmes d'analyse (convergence dominée, dérivation sous le signe intégrale) et les notions de convergence uniforme, de série entière et de famille sommable. La difficulté reste contenue et elle est croissante, ce qui est parfait pour se préparer aux concours.

Indications

Exercice I

I.1 Raisonner par analyse-synthèse. Dans l'analyse, se donner une solution f de (E) développable en série entière, écrire f et ses dérivées sous forme de sommes de séries entières et injecter ces expressions dans l'équation. Utiliser l'unicité du développement en série entière de la fonction nulle pour conclure.

Exercice II

II.1 D'abord, penser à faire une partition. Ensuite, calculer

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\,x^k \qquad \text{puis} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)x^{k-1}$$

Une autre solution consiste à calculer, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i+j}{2^{i+j}} \qquad \text{puis} \qquad \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i+j}{2^{i+j}}$$

II.2.c Regarder si les événements $(\mathrm{X}=0)$ et $(\mathrm{Y}=0)$ sont indépendants.

Problème

III.1.b Utiliser le fait que f_x est strictement positive et que, sur un segment, une fonction continue admet un minimum.

III.1.c Appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale à l'aide d'une domination uniforme des dérivées sur un segment.

III.3.a Utiliser un argument de convexité ou faire une étude de fonction.

III.3.b Appliquer le théorème de convergence dominée.

III.4.a Effectuer une intégration par parties.

III.4.b Calculer $\mathrm{I}_0(x+n)$ et faire une récurrence.

III.4.c Effectuer le changement de variable $u = t/n$.

III.6.b Montrer la convergence normale de la série sur tout segment.

III.6.c Dériver l'expression de g de la question III.5 et combiner ce résultat avec l'expression de g' obtenue à la question III.6.b.

III.7.c Montrer la convergence normale de la série de fonctions. Utiliser ensuite le théorème de la double limite.

III.8 Remarquer que les propriétés 1 et 2 suffisent à prouver III.7.b. Ensuite, exprimer $f(x)$ en fonction de $f(x+n)$ en sommant la propriété 2, et faire apparaître $f(1+n)$ afin d'utiliser la propriété 3. Enfin, se servir de l'expression de la question III.6.c.

III.9.b Il y a une erreur d'énoncé : il faut démontrer le résultat pour tout $k \in [\![\,1\,;n\,]\!]$ et non pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Utiliser le système complet d'événements $(\mathrm{X}=i)_{i\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]}$. Ensuite, calculer $\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k \mid \mathrm{X}=i)$ en distinguant $i=k$ et $i \neq k$.

Exercice I

I.1 Analyse : soient $r > 0$ et f une solution de (E), développable en série entière sur $]-r\,;r[$. Soit une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ telle que

$$\forall x \in \,]-r\,;r[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$$

La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur son disque ouvert de convergence. D'après le théorème de dérivation terme à terme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r\,;r[$ et, pour tout $x \in \,]-r\,;r[$,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n\, x^{n-2}$$

Soit $x \in \,]-r\,;r[$. La fonction f étant solution de l'équation différentielle, on a

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 f''(x) + (x^2 - x)f'(x) + 2\,f(x)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n\,a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} n\,a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2\,a_n x^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \big((n(n-1) - n + 2)a_n\big)x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a_{n-1}\, x^n\\
0 &= 2a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n(n-2)+2)a_n + (n-1)a_{n-1}\right) x^n
\end{aligned}$$

Cette égalité étant vraie sur un intervalle réel centré en 0, on en déduit par unicité du développement en série entière que

$$a_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \frac{-(n-1)a_{n-1}}{n(n-2)+2}$$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on obtient que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc que f est identiquement nulle.

Synthèse : Réciproquement, la fonction nulle est solution de (E).

> Pour tout $r > 0$, la fonction nulle est l'unique solution de (E) développable en série entière sur $]-r\,;r[$.

Exercice II

II.1 On partitionne $\mathbb{N}^2$ en une réunion d'ensembles finis :

$$\mathbb{N}^2 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j = k\}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $\operatorname{Card}(\{(i,j) \in \mathbb{N} \mid i + j = k\}) = k + 1$, on a

$$\sum_{i+j=k} \frac{k}{2^k} = \frac{k(k+1)}{2^k}$$

La famille $\big((i+j)/2^{i+j}\big)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si $\big(k(k+1)/2^k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ l'est en vertu du théorème de sommation par paquets. On remarque que

$$k^2\, \frac{k(k+1)}{2^k} = \mathrm{O}\left(\frac{k^4}{2^k}\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, $k(k+1)/2^k = \mathrm{o}\left(1/k^2\right)$. Or la série $\sum 1/k^2$ converge absolument, donc la famille $\left((i+j)/2^{i+j}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i+j}{2^{i+j}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i+j=k}\frac{k}{2^k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k(k+1)}{2^k}$$

On a $$\forall\, x\in [\,0\,;1\,[\qquad \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

De plus, la série entière $\sum x^k$ a un rayon de convergence égal à 1, donc sa somme est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[\,0\,;1\,[$ et elle est dérivable terme à terme. Par conséquent, en dérivant la somme une première fois, on obtient

$$\forall x\in [\,0\,;1\,[\qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k\, x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

puis, en la dérivant une seconde fois, il vient

$$\forall x\in [\,0\,;1\,[\qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)x^{k-1} = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

En utilisant la relation ci-dessus, on a

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i+j}{2^{i+j}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k(k+1)}{2^{k-1}} = \frac{1}{(1-1/2)^3} = 8$$

Finalement, $$\boxed{\left(\frac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \text{ est sommable et sa somme vaut } 8.}$$

Calculons la double somme sans considérer de partition. Soit $i\in\mathbb{N}$. La suite $\left((i+j)/2^{i+j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $\left(1/j^2\right)_{j\in\mathbb{N}^*}$ donc elle est sommable. Calculons sa somme

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i+j}{2^{i+j}} &= \frac{i}{2^i}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{i+1}}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j}{2^{j-1}}\\ &= \frac{i}{2^i}\,\frac{1}{(1-1/2)} + \frac{1}{2^{i+1}}\,\frac{1}{(1-1/2)^2}\\ \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i+j}{2^{i+j}} &= \frac{i}{2^{i-1}} + \frac{2}{2^i}\end{aligned}$$

De même, la famille $\left(i/2^{i-1}+2/2^i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable et

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i+j}{2^{i+j}} &= \sum_{i=0}^{+\infty}\left[\frac{i}{2^{i-1}}+\frac{2}{2^i}\right]\\ &= \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i}{2^{i-1}} + 2\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2^i}\\ \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i+j}{2^{i+j}} &= \frac{1}{(1-1/2)^2} + 2\,\frac{1}{1-1/2} = 8\end{aligned}$$