

Mines Physique 2 PSI 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Maimbourg (ENS Cachan) ; il a été relu par Vincent Freulon (Professeur en CPGE) et Emmanuel Bourgeois (Professeur en CPGE).

Ce sujet comporte deux parties totalement indépendantes.

- La première partie, la plus longue, étudie le principe de fonctionnement d'une machine à liquéfier de l'azote. Elle est divisée en trois sous-parties. La première vise à dimensionner l'étage de compression de l'azote, constitué de plusieurs sous-ensembles compresseurs-réfrigérants en série. La deuxième étudie un diagramme enthalpique pour une transformation comportant un changement d'état liquide-vapeur. Quant à la troisième, elle a pour objectif de dimensionner l'échangeur thermique (E) à partir d'un raisonnement sur l'enthalpie. En particulier, le premier principe industriel est largement mis à profit dans cette étude.
- La seconde partie étudie par une approche mécanique une machine hydraulique : la roue-vanne de Sagebien. Cette partie est divisée en deux sous-parties. La première détermine le couple exercé par l'eau sur l'arbre de la roue en faisant le lien entre le débit et la vitesse de rotation de la roue, puis en explicitant la force exercée par l'eau sur les pales afin de déterminer le moment des forces. La dernière sous-partie permet enfin de comparer la puissance fournie par l'eau à la roue à celle effectivement disponible sur l'axe de rotation. Il est alors possible d'établir le rendement mécanique du système.

La première partie est d'une difficulté raisonnable sous réserve d'avoir bien assimilé le cours de thermodynamique. La seconde comporte des questions délicates pouvant conduire à des calculs lourds.

INDICATIONS

Partie I

- 1 Utiliser la loi de Laplace pour déterminer la valeur maximale de r , après avoir précisé les conditions de son application.
- 2 La pression finale ne dépend que du rapport de compression et du nombre de compresseurs.
- 3 Appliquer le premier principe industriel entre les instants t et $t+dt$ aux deux sous-systèmes {diazote} puis {eau}. Exprimer la variation d'enthalpie dH du système en fonction des enthalpies et des débits massiques.
- 10 Utiliser le même raisonnement qu'à la question 3.
- 13 Appliquer le premier principe industriel à l'un des compresseurs.

Partie II

- 14 Écrire le volume passant dans la roue en fonction de ω et le comparer au volume entrant.
- 16 Utiliser l'équation d'Euler en la simplifiant pour un champ de vitesse constant et homogène. L'eau est supposée incompressible.
- 17 Pour le calcul de la résultante, comparer les pressions de part et d'autre de la pale. En ce qui concerne le calcul du moment des forces, noter que le point d'application de la résultante est au milieu de la pale. On pourra faire l'approximation des petits angles pour alléger les calculs.
- 20 Une puissance de 100 hp et une vitesse de 100 km.h^{-1} sont de bons ordres de grandeur.
- 22 Faire un bilan d'énergie en tenant compte du poids et de l'action de la roue. Que peut-on dire des forces de pression ?

MACHINES À ÉCOULEMENT PERMANENT

I. DIMENSIONNEMENT D'UNE INSTALLATION DE LIQUÉFACTION

1 Le diazote est assimilé à un gaz parfait diatomique. Aux températures usuelles, en notant R la constante des gaz parfaits, la capacité thermique à volume constant associée à une quantité de matière n de gaz s'écrit par conséquent

$$C_v = \frac{5}{2}nR$$

Pour un gaz parfait, l'énergie interne est associée aux nombres de degrés de liberté des molécules. Par ailleurs, le théorème d'équipartition de l'énergie, issu de la physique statistique, assure que chaque degré de liberté des particules contribue à raison de $RT/2$ à l'énergie cinétique molaire du gaz. Pour un gaz diatomique, aux températures usuelles, les degrés de liberté sont les translations du centre de masse de la molécule dans les trois directions de l'espace (trois degrés de liberté) et la rotation de la molécule autour de son centre de masse (deux degrés de liberté). Ainsi, cinq degrés de liberté contribuent à l'énergie interne molaire, d'où $U = 5/2nRT$.

De plus, d'après la relation de Mayer, pour un gaz parfait

$$C_p = C_v + nR = \frac{7}{2}nR$$

d'où

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5} = 1,4$$

Le compresseur réalise la compression adiabatique réversible d'un gaz parfait. Il est donc possible d'appliquer l'une des formes de la loi de Laplace. Ici, il convient de choisir celle faisant intervenir la température et la pression

$$T^\gamma P^{1-\gamma} = C^{\text{te}}$$

Il est évidemment inutile de connaître l'ensemble des formes de la loi de Laplace. La plus simple à mémoriser est probablement $PV^\gamma = C^{\text{te}}$. Il suffit alors d'utiliser l'équation d'état des gaz parfaits pour obtenir la forme nécessaire.

La température d'entrée du gaz est fixée à T_E et la température de sortie du diazote ne peut dépasser T_{max} , si bien que dans le cas limite, on obtient la valeur maximale du rapport de compression

$$r_{\text{max}} = \left(\frac{T_{\text{max}}}{T_E} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

Par ailleurs, les étages de compression étant tous identiques,

$$p_A = r^N p_E$$

Utilisons alors la valeur limite r_{max} afin de calculer le nombre minimum d'étages de compression nécessaires N_{min} . En prenant le logarithme de l'expression précédente, il vient

$$N_{\text{min}} = \frac{\ln(P_A/P_E)}{\ln r_{\text{max}}} = \frac{(\gamma-1) \ln(P_A/P_E)}{\gamma \ln(T_{\text{max}}/T_E)} = 4,6$$

Le nombre N étant entier, choisissons donc l'entier immédiatement supérieur comme nombre minimal de compresseur, soit

$$\boxed{N = 5}$$

2 Le rapport de compression r étant maintenu constant, le même nombre d'étages de compression est nécessaire pour obtenir la compression finale p_A . Par conséquent,

Le nombre N de compresseurs est identique.

Si l'ajout d'irrégularités ne modifie pas le nombre d'étages de compression nécessaires, en revanche, la dimension du corps des cylindres des compresseurs est augmentée pour maintenir le même rapport r . Une puissance mécanique supérieure est donc nécessaire pour l'actionnement de chacun des compresseurs.

En pratique, la prise en compte d'irrégularités s'accompagne d'une augmentation plus élevée de la température lors de la compression. Il est alors nécessaire de diminuer r afin de vérifier la contrainte sur la température.

3 En se plaçant comme indiqué par l'énoncé dans le cas $N = 5$, le rapport de compression prend la valeur $r = (P_A/P_E)^{1/N}$. Calculons la température T_{sortie} du diazote en sortie de l'un des compresseurs. En utilisant la relation de Laplace, avec T_E la température d'entrée, il vient

$$T_{\text{sortie}} = r^{(\gamma-1)/\gamma} T_E = \left(\frac{P_A}{P_E} \right)^{(\gamma-1)/(N\gamma)} T_E$$

Appliquons le premier principe industriel aux systèmes constitués par chacun des deux fluides dans l'échangeur thermique. En toute généralité, le bilan s'écrit, pour des grandeurs massiques,

$$\Delta(h + e_{c,\text{macro}} + \rho g z) = w_m + q_m$$

Dans le cas présent, le système est isolé de l'extérieur. L'unique échange d'énergie est le transfert thermique d'un fluide vers l'autre. Par ailleurs, la variation d'énergie macroscopique est supposée négligeable : il n'y a ni variation de l'énergie cinétique, ni variation de l'énergie potentielle de pesanteur. Écrivons le bilan pour chacun des deux fluides :

$$\Delta h_{\text{azote}} = q_{\text{azote}} \quad \text{et} \quad \Delta h_{\text{eau}} = q_{\text{eau}}$$

Par ailleurs, pendant l'instant dt , les masses $\mathcal{D}dt$ de diazote et $\mathcal{D}_{\text{eau}}dt$ d'eau passent dans l'échangeur. Les équations précédentes se réécrivent alors, par extensivité,

$$\Delta h_{\text{azote}} \mathcal{D}dt = q_{\text{azote}} \mathcal{D}dt \quad \text{et} \quad \Delta h_{\text{eau}} \mathcal{D}_{\text{eau}}dt = q_{\text{eau}} \mathcal{D}_{\text{eau}}dt$$

L'échange thermique se faisant uniquement entre les deux fluides, il vient

$$q_{\text{eau}} \mathcal{D}_{\text{eau}}dt = -q_{\text{azote}} \mathcal{D}dt$$

Finalement, $\mathcal{D}_{\text{eau}} \Delta h_{\text{eau}} + \mathcal{D} \Delta h_{\text{azote}} = 0$