Mines Maths 2 PSI 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Matthias Moreno (ENS Lyon) ; il a été relu par Céline Chevalier (Enseignant-chercheur à l'université) et Guillaume Batog (Professeur en CPGE).

Le groupe orthogonal réel O_n est l'ensemble des matrices carrées M de taille n vérifiant ${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$. En remplaçant cette condition par ${}^t\mathrm{M}\cdot\mathrm{J}\cdot\mathrm{M} = \mathrm{J}$ où (lorsque n est pair)

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0_{n/2} & -\mathrm{I}_{n/2} \\ \mathrm{I}_{n/2} & 0_{n/2} \end{pmatrix}$$

les matrices M forment le groupe symplectique réel, noté $\mathcal{S}p_n$. L'étude de ce groupe est l'objet de cette épreuve.

Les parties II et III sont indépendantes, mais chacune utilise l'ensemble des résultats de la partie I, notamment celui de la question 8.

- La partie I montre que le produit de deux matrices de $\mathcal{S}p_{2n}$, l'inverse, et la transposée d'une matrice de $\mathcal{S}p_{2n}$ sont aussi des matrices de $\mathcal{S}p_{2n}$. On examine quelques éléments de ce groupe et on termine par une description générale par blocs des matrices de $\mathcal{S}p_{2n}$. Hormis la question 7, où l'on peut tourner en rond, cette partie ne présente pas de difficultés particulières.
- La partie II montre que l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}p_{2n}$ qui commutent avec toutes les autres est égal à $\{-\mathrm{I}_{2n}, \mathrm{I}_{2n}\}$. Si l'on pense à réutiliser les exemples vus précédemment, cette partie est encore relativement facile, mis à part la dernière question où l'on démontre le résultat classique suivant : une matrice commute avec toutes les matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, elle est de la forme $\lambda\mathrm{I}_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
- La partie III montre que toutes les matrices de $\mathcal{S}p_{2n}$ ont pour déterminant 1. On étudie d'abord un cas particulier, en montrant que la matrice s'écrit comme le produit d'une matrice triangulaire supérieure par une matrice triangulaire inférieure (par blocs). Ensuite, l'examen des vecteurs propres d'une matrice symétrique permet de ramener le cas général au cas particulier précédent.

Cette épreuve est élémentaire, la plupart des questions se résolvent par un simple calcul. Elle permet de travailler sur les différentes opérations matricielles (produit par blocs, transposée, inverse, déterminant). Dans la dernière partie, on aborde quelques questions d'algèbre bilinéaire (produit scalaire, matrice symétrique, vecteurs propres orthogonaux).

INDICATIONS

Partie I

1 Utiliser la formule de calcul du produit de matrices par blocs rappelée dans l'énoncé. Déduire directement l'inverse de J du calcul de J^2.

2 Utiliser les résultats de la question 1 pour J.

4 Prendre le déterminant dans l'équation qui définit l'appartenance à $\mathcal{S}p_{2n}$.

6 La question 4 donne directement l'inversibilité.

7 Commencer par prendre l'inverse dans l'égalité définissant $\mathcal{S}p_{2n}$.

8 Faire les calculs par blocs, puis identifier les blocs.

Partie II

10 Reconnaître la matrice de la question 2 pour $\alpha = -1$. Écrire que M commute avec L et ${}^t\mathrm{L}$. Une fois M de la forme voulue, l'examen de son déterminant montre que A est inversible.

11 Se reporter à la question 3, puis écrire que M commute avec L_U.

12 L'indication de l'énoncé permet de montrer que A est de la forme $\lambda \mathrm{I}_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On conclut avec la question 4.

Partie III

13 Raisonner par analyse-synthèse, en effectuant des calculs par blocs. Penser à utiliser l'hypothèse que D est inversible.

14 La question 8 permet de montrer que BD^{-1} est symétrique. Appliquer ensuite le déterminant à la formule de la question 13 et utiliser à nouveau la question 8 pour simplifier le résultat.

15 Le produit scalaire se calcule matriciellement. En utilisant sa symétrie, on fait apparaître une première fois s_1, puis s_2.

16 La question 8 permet de conclure directement.

17 Pour la liberté, montrer que les vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

18 Si $\mathrm{D} - \alpha\mathrm{B}$ n'est pas inversible, alors son noyau possède un vecteur non nul.

19 Multiplier M par $\mathrm{K}(\alpha)$ permet de se ramener au cas de la question 14. Conclure grâce à l'égalité $\det \mathrm{K}(\alpha) = 1$.

I. LE GROUPE SYMPLECTIQUE

1 Tout d'abord, utilisons la formule de calcul par blocs donnée dans l'énoncé :

$$\mathrm{J}^2 = \begin{pmatrix} 0_n & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n \cdot 0_n - \mathrm{I}_n \cdot \mathrm{I}_n & 0_n \cdot (-\mathrm{I}_n) - \mathrm{I}_n \cdot 0_n \\ \mathrm{I}_n \cdot 0_n + 0_n \cdot \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \cdot (-\mathrm{I}_n) + 0_n \cdot 0_n \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{J}^2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{I}_n & 0_n \\ 0_n & -\mathrm{I}_n \end{pmatrix} = -\mathrm{I}_{2n}}$$

Ensuite,

$$ {}^t\mathrm{J} = {}^t\begin{pmatrix} 0_n & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t0_n & {}^t\mathrm{I}_n \\ {}^t(-\mathrm{I}_n) & {}^t0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & 0_n \end{pmatrix}$$

d'où

$$\boxed{{}^t\mathrm{J} = -\mathrm{J}}$$

> Attention, lorsque l'on écrit la transposée d'une matrice par blocs, il faut penser à échanger les blocs anti-diagonaux !

Enfin, l'égalité $\mathrm{J}^2 = -\mathrm{I}_{2n}$ se réécrit $\mathrm{J} \cdot (-\mathrm{J}) = \mathrm{I}_{2n}$ donc

$$\boxed{\text{J est inversible et } \mathrm{J}^{-1} = -\mathrm{J}.}$$

2 On a $\mathrm{J} \in \mathscr{M}_{2n}$. D'après la question 1, ${}^t\mathrm{J} \cdot \mathrm{J} \cdot \mathrm{J} = -\mathrm{J} \cdot \mathrm{J}^2 = -\mathrm{J} \times (-\mathrm{I}_{2n}) = \mathrm{J}$ d'où

$$\boxed{\mathrm{J} \in \mathcal{S}p_{2n}}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a ${}^t\mathrm{K}(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -\alpha\mathrm{I}_n \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$. Calculons

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 0_n & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0_n \end{pmatrix}}^{\mathrm{J}} & \overbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0_n \\ -\alpha\mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}}^{\mathrm{K}(\alpha)} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -\alpha\mathrm{I}_n \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}}_{{}^t\mathrm{K}(\alpha)} & \underbrace{\begin{pmatrix} -\alpha\mathrm{I}_n & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0_n \end{pmatrix}}_{{}^t\mathrm{K}(\alpha)\cdot\mathrm{J}} & \begin{pmatrix} 0_n & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0_n \end{pmatrix} = {}^t\mathrm{K}(\alpha) \cdot \mathrm{J} \cdot \mathrm{K}(\alpha) \end{array}$$

donc

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{K}(\alpha) \in \mathcal{S}p_{2n}}$$

3 Soit $\mathrm{U} \in \mathcal{G}_n$, on a bien $\mathrm{L}_\mathrm{U} \in \mathscr{M}_{2n}$ puis ${}^t\mathrm{L}_\mathrm{U} = \begin{pmatrix} {}^t\mathrm{U} & 0_n \\ 0_n & \mathrm{U}^{-1} \end{pmatrix}$ d'où

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 0_n & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0_n \end{pmatrix}}^{\mathrm{J}} & \overbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{U} & 0_n \\ 0_n & {}^t\mathrm{U}^{-1} \end{pmatrix}}^{\mathrm{L}_\mathrm{U}} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} {}^t\mathrm{U} & 0_n \\ 0_n & \mathrm{U}^{-1} \end{pmatrix}}_{{}^t\mathrm{L}_\mathrm{U}} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0_n & -{}^t\mathrm{U} \\ \mathrm{U}^{-1} & 0_n \end{pmatrix}}_{{}^t\mathrm{L}_\mathrm{U}\cdot\mathrm{J}} & \begin{pmatrix} 0_n & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0_n \end{pmatrix} = {}^t\mathrm{L}_\mathrm{U} \cdot \mathrm{J} \cdot \mathrm{L}_\mathrm{U} \end{array}$$

car ${}^t\mathrm{U}\,{}^t\mathrm{U}^{-1} = {}^t(\mathrm{U}^{-1}\mathrm{U}) = {}^t\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n$. Finalement,

$$\boxed{\forall\, \mathrm{U} \in \mathcal{G}_n \qquad \mathrm{L}_\mathrm{U} \in \mathcal{S}p_{2n}}$$

> La notation ${}^t\mathrm{U}^{-1}$ n'est pas ambiguë car pour toute matrice U inversible, la matrice ${}^t\mathrm{U}$ est inversible et ${}^t(\mathrm{U}^{-1}) = ({}^t\mathrm{U})^{-1}$ d'après le cours.

4 Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}$. Alors ${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{J}\mathrm{M} = \mathrm{J}$. D'après les propriétés du déterminant, on a

$$\det \mathrm{J} = \det({}^t\mathrm{M}\,\mathrm{J}\mathrm{M}) = \underbrace{\det({}^t\mathrm{M})}_{=\det \mathrm{M}} \times \det \mathrm{J} \times \det \mathrm{M} = \det \mathrm{J} \times (\det \mathrm{M})^2$$

Puisque J est inversible (question 1), det J est non nul d'où $(\det \mathrm{M})^2 = 1$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n} \text{ alors } \det \mathrm{M} = \pm 1.}$$

5 Soit $(\mathrm{M},\mathrm{N}) \in (\mathcal{S}p_{2n})^2$. Alors $\mathrm{MN} \in \mathcal{S}p_{2n}$. Calculons

$$\begin{aligned} {}^t(\mathrm{MN})\,\mathrm{J}(\mathrm{MN}) &= {}^t\mathrm{N}({}^t\mathrm{M}\,\mathrm{J}\mathrm{M})\mathrm{N} \\ &= {}^t\mathrm{N}\,\mathrm{J}\mathrm{N} && (\text{car } \mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}) \\ {}^t(\mathrm{MN})\,\mathrm{J}(\mathrm{MN}) &= \mathrm{J} && (\text{car } \mathrm{N} \in \mathcal{S}p_{2n}) \end{aligned}$$

donc $$\boxed{\forall\,(\mathrm{M},\mathrm{N}) \in (\mathcal{S}p_{2n})^2 \qquad \mathrm{MN} \in \mathcal{S}p_{2n}}$$

6 Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}$. D'après la question 4, M est inversible car de déterminant non nul. Multiplions l'égalité ${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{J}\mathrm{M} = \mathrm{J}$ à gauche par $({}^t\mathrm{M})^{-1}$ et à droite par M^{-1}. Il vient

$$\mathrm{J} = ({}^t\mathrm{M})^{-1}\mathrm{J}\mathrm{M}^{-1} = {}^t(\mathrm{M}^{-1})\,\mathrm{J}\mathrm{M}^{-1}$$

d'où $$\boxed{\forall\,\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n} \qquad \mathrm{M} \in \mathcal{G}_{2n} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}^{-1} \in \mathcal{S}p_{2n}}$$

7 Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}$. D'après la question 6, $\mathrm{M}^{-1} \in \mathcal{S}p_{2n}$ d'où ${}^t(\mathrm{M}^{-1})\,\mathrm{J}\mathrm{M}^{-1} = \mathrm{J}$. Prenons l'inverse :

$$({}^t\mathrm{M}^{-1} \times \mathrm{J} \times \mathrm{M}^{-1})^{-1} = \mathrm{J}^{-1}$$

Comme $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$ pour toutes matrices $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathcal{G}_{2n}$, on obtient

$$\begin{aligned} (\mathrm{M}^{-1})^{-1} \times \mathrm{J}^{-1} \times ({}^t\mathrm{M}^{-1})^{-1} &= \mathrm{J}^{-1} \\ \mathrm{M} \times (-\mathrm{J}) \times {}^t\mathrm{M} &= -\mathrm{J} \quad (\mathrm{J}^{-1} = -\mathrm{J}, \text{ question 1}) \\ \mathrm{M}\mathrm{J}\,{}^t\mathrm{M} &= \mathrm{J} \end{aligned}$$

soit $${}^t({}^t\mathrm{M})\,\mathrm{J}\,{}^t\mathrm{M} = \mathrm{J}$$

Ainsi, $$\boxed{\forall\,\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n} \qquad {}^t\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}}$$

> Si l'on prend la transposée dans ${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{J}\mathrm{M} = \mathrm{J}$, on retombe sur la même égalité. En effet, la transposée échange l'ordre des matrices et elle transforme également M en ${}^t\mathrm{M}$! En prenant l'inverse, on échange l'ordre des matrices sans transformer M en ${}^t\mathrm{M}$, ce qui fait passer ${}^t\mathrm{M}$ du bon côté.

8 On a $${}^t\mathrm{M} = \begin{pmatrix} {}^t\mathrm{A} & {}^t\mathrm{C} \\ {}^t\mathrm{B} & {}^t\mathrm{D} \end{pmatrix}$$

d'où $${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{J} = \begin{pmatrix} {}^t\mathrm{A} & {}^t\mathrm{C} \\ {}^t\mathrm{B} & {}^t\mathrm{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\mathrm{C} & -{}^t\mathrm{A} \\ {}^t\mathrm{D} & -{}^t\mathrm{B} \end{pmatrix}$$

puis $${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{J}\mathrm{M} = \begin{pmatrix} {}^t\mathrm{C} & -{}^t\mathrm{A} \\ {}^t\mathrm{D} & -{}^t\mathrm{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\mathrm{C}\,\mathrm{A} - {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{C} & {}^t\mathrm{C}\,\mathrm{B} - {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{D} \\ {}^t\mathrm{D}\,\mathrm{A} - {}^t\mathrm{B}\,\mathrm{C} & {}^t\mathrm{D}\,\mathrm{B} - {}^t\mathrm{B}\,\mathrm{D} \end{pmatrix}$$

Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficients, d'où