CCP Maths PSI 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Pauline Tan (ENS Cachan) ; il a été relu par Mathilde Perrin (Docteur en mathématiques) et Sophie Rainero (Professeur en CPGE).

Ce sujet est consacré à l'étude d'un système différentiel linéaire homogène de taille $n \in \mathbb{N}^*$ défini sur un intervalle I par

$$\forall\, t \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{X}'(t) = \mathrm{A}(t)\,\mathrm{X}(t) \tag{E}$$

avec $\mathrm{X} : \mathrm{I} \to \mathbb{C}^n$ dérivable et $\mathrm{A} : \mathrm{I} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une fonction continue.

- Dans la première partie, on commence par établir deux résultats qui permettront de trouver des bases de solutions de l'équation (E). Ensuite, pour $n = 2$, on étudie l'équation (E) dans le cas où A est diagonalisable, d'abord lorsqu'elle est constante puis dans le cas général.
- La deuxième partie aborde le cas où A est constante, mais de taille n quelconque (puis égale à 4). Cette restriction permet de développer les solutions en séries entières dont les sommes s'écrivent en fonction des A^k. On montre alors que ces puissances de A sont combinaisons linéaires de A et de $\mathrm{A}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)$, ce qui fournit une formule explicite pour les solutions X.
- Enfin, la troisième partie considère les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par

$$u : t \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}\cos(tx)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad v : t \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}\sin(tx)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

  dont on montre qu'elles sont solutions d'une équation de la forme (E). Résoudre cette équation permet de donner une formule explicite pour u et v.

Mis à part une question hors-programme dans la deuxième partie, ce sujet est relativement facile. Il couvre l'essentiel du programme sur les équations différentielles linéaires homogènes et permet également de travailler la diagonalisation. Les trois parties du sujet sont pratiquement indépendantes, seules les questions I.1 et I.2 étant utiles dans les autres parties.

Indications

Partie I

I.3 Calculer le polynôme caractéristique de A pour déterminer ses valeurs propres, puis trouver une base de vecteurs propres.

I.4.1 Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, montrer que $x+y$ et $x-y$ sont solutions d'équations différentielles linéaires d'ordre 1.

I.4.2 Fixer t et déterminer valeurs propres et vecteurs propres de $A(t)$.

I.4.4 Utiliser la question I.2 avec les couples (λ_1, V_1) et (λ_2, V_2) déterminés à la question I.4.2.

Partie II

II.1.1 Commencer par montrer que N(A) est bien définie pour toute matrice A, puis établir les trois propriétés qui caractérisent les normes.

II.2.1 Raisonner par récurrence.

II.2.2 Appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale à chacune des coordonnées de X.

II.2.3 Cette question est hors-programme. Admettre que, pour $t \in I$, tel que $t \geqslant 0$,

$$\left\| \int_0^t \frac{(t-u)^p}{p!} \, A^{p+1} X(u) \, du \right\| \leqslant \int_0^t \left\| \frac{(t-u)^p}{p!} \, A^{p+1} X(u) \right\| du$$

puis utiliser la question II.2.2 pour majorer $\|A^{p+1}X(u)\|$. Enfin, les croissances comparées permettent de prouver que le membre de droite dans l'inégalité ci-dessus tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

II.3.2 Écrire la division euclidienne, en exprimant le reste dans la base proposée, puis évaluer en 0 et 1. Penser également à simplifier par $X(X-1)$ et à dériver, avant d'évaluer à nouveau en 1.

II.3.3 Penser à utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.

II.3.5 Commencer par travailler avec les sommes partielles.

II.3.6 Utiliser les questions II.2.3, II.3.3, II.3.4 et II.3.5.

Partie III

III.1.2 Utiliser le théorème fondamental de l'analyse pour F et le théorème de dérivation des intégrales à paramètre pour G.

III.1.3 Effectuer le changement de variable $u = x\,t$ dans l'une des intégrales, puis calculer $F(0) + G(0)$.

III.1.4 Commencer par prouver que $G(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

III.2.1 Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

III.2.2 Calculer w et w' en les écrivant en fonction de u, v, u' et v' pour déterminer l'équation différentielle demandée. Ensuite, identifier les parties réelle et imaginaire.

III.2.4 Appliquer les questions I.2 et I.1 pour trouver une base de solutions, que l'on calcule explicitement.

III.2.5 Établir l'expression générale de u et de v grâce à la question III.2.4, puis calculer de deux manières différentes $u(0)$ et $v(0)$.

I. Quelques exemples d'étude d'un système différentiel

I.1 Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire assure que

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation (E) forme un } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel de dimension } n.}$$

I.2 La fonction $\mathrm{X} : t \mapsto \alpha(t)\,\mathrm{V}$ est solution de l'équation (E) si et seulement si elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{X}'(t) = \mathrm{A}(t)\,\mathrm{X}(t)$$

Or, la fonction X est de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si la fonction α est elle-même de classe $\mathscr{C}^1$, avec dans ce cas

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{X}'(t) = \alpha'(t)\,\mathrm{V}$$

On en déduit que X est solution de (E) si et seulement si α est $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \alpha'(t)\,\mathrm{V} = \mathrm{A}(t)\,\big(\alpha(t)\,\mathrm{V}\big) = \alpha(t)\,\mathrm{A}(t)\,\mathrm{V} \qquad\qquad (\alpha(t) \in \mathbb{C})$$

Par hypothèse, on a $\mathrm{A}(t)\,\mathrm{V} = \lambda(t)\,\mathrm{V}$ pour tout $t \in \mathrm{I}$. Il s'ensuit que la fonction X est solution de (E) si et seulement si α est $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \alpha'(t)\,\mathrm{V} = \lambda(t)\,\alpha(t)\,\mathrm{V}$$

soit, puisque V est supposé non nul, si et seulement si

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \alpha'(t) = \lambda(t)\,\alpha(t)$$

Par conséquent,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La fonction } \mathrm{X} : t \longmapsto \alpha(t)\,\mathrm{V} \text{ est solution de (E) si et seulement si la fonction } \alpha \\ \text{est } \mathscr{C}^1 \text{ et } \alpha \text{ est solution de l'équation différentielle } \alpha'(t) = \lambda(t)\,\alpha(t)\text{. Pour tout} \\ t_0 \in \mathrm{I} \text{ fixé, les solutions de cette équation différentielle sont données par} \\ \qquad t \longmapsto \mathrm{C}\,\exp\left(\displaystyle\int_{t_0}^{t} \lambda(u)\,\mathrm{d}u\right) \qquad \text{avec } \mathrm{C} \in \mathbb{C}.\end{array}}$$

I.3 L'équation différentielle étudiée correspond à un système différentiel linéaire à coefficients constants. Il faut donc commencer par calculer les valeurs propres de la matrice A. Pour cela, considérons son polynôme caractéristique :

$$\mathrm{P_A(X)} = \det(\mathrm{X\,I_2} - \mathrm{A}) = \begin{vmatrix} \mathrm{X} - a & -1 + a \\ -b & \mathrm{X} - 1 + b \end{vmatrix} = \mathrm{X}^2 - (a - b + 1)\,\mathrm{X} + a - b$$

Déterminons les racines de ce polynôme : son discriminant vaut

$$\Delta = (a - b + 1)^2 - 4\,(a - b) = (a - b)^2 + 2\,(a - b) + 1 - 4\,(a - b) = (a - b - 1)^2$$

D'après les hypothèses sur a et b qui assurent que $a - b - 1$ est non nul, le discriminant Δ est également non nul. Par conséquent, la matrice A est diagonalisable, de valeurs propres distinctes

$$\lambda_1 = \frac{(a - b + 1) + (a - b - 1)}{2} = a - b$$

et

$$\lambda_2 = \frac{(a - b + 1) - (a - b - 1)}{2} = 1$$

Déterminons à présent les sous-espaces propres associés à ces deux valeurs propres. Commençons par le sous-espace propre $\mathrm{E}_{\lambda_1}(\mathrm{A})$ associé à λ_1. Le vecteur $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{E}_{\lambda_1}(\mathrm{A})$ si et seulement s'il vérifie

$$\mathrm{A\,V} = \lambda_1\,\mathrm{V} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} a\,x + (1-a)\,y = (a-b)\,x \\ b\,x + (1-b)\,y = (a-b)\,y \end{cases}$$

En simplifiant, on obtient

$$\begin{cases} (1-a)\,y = -b\,x \\ b\,x + y = a\,y \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad b\,x + (1-a)\,y = 0$$

En particulier, on en déduit que le sous-espace propre $\mathrm{E}_{\lambda_1}(\mathrm{A})$ est généré par le vecteur non nul $\mathrm{V}_1 = \begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix}$. En résolvant ensuite le système

$$\mathrm{A\,V} = \lambda_2\,\mathrm{V} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} a\,x + (1-a)\,y = x \\ b\,x + (1-b)\,y = y \end{cases}$$

on démontre de la même façon que le sous-espace propre $\mathrm{E}_{\lambda_2}(\mathrm{A})$ associé à la valeur propre λ_2 est généré par le vecteur non nul $\mathrm{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'ensemble des solutions est de dimension 2 et les deux fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\mathrm{V}_1$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\mathrm{V}_2$ sont linéairement indépendantes. Ainsi, les solutions de l'équation (E) sont de la forme

$$t \mapsto \mathrm{C}_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\mathrm{V}_1 + \mathrm{C}_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\mathrm{V}_2 \qquad\qquad \text{avec } (\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Les fonctions

$$t \longmapsto \mathrm{e}^{(a-b)t}\begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad t \longmapsto \mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base des solutions de l'équation (E).

I.4.1 Si $\mu = 1$, alors $\qquad \forall\, t \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{A}(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}$

Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec x et y deux fonctions $\mathscr{C}^1$ de I dans $\mathbb{C}$. La fonction X est solution de l'équation (E) si et seulement si

$$\forall\, t \in \mathrm{I} \qquad \begin{cases} x'(t) = a(t)\,x(t) + b(t)\,y(t) \\ y'(t) = b(t)\,x(t) + a(t)\,y(t) \end{cases}$$

En considérant la somme puis la différence des deux équations de ce système linéaire, on en déduit qu'il est équivalent au système

$$\forall\, t \in \mathrm{I} \qquad \begin{cases} x'(t) + y'(t) = \big(a(t) + b(t)\big)\,\big(x(t) + y(t)\big) \\ x'(t) - y'(t) = \big(a(t) - b(t)\big)\,\big(x(t) - y(t)\big) \end{cases}$$

soit, en posant $z = x + y$ et $v = x - y$,

$$\forall\, t \in \mathrm{I} \qquad \begin{cases} z'(t) = \big(a(t) + b(t)\big)\,z(t) \\ v'(t) = \big(a(t) - b(t)\big)\,v(t) \end{cases}$$