X/ENS Physique B PC 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Rémi Lehe (ENS Ulm) ; il a été relu par Julien Dumont (Professeur en CPGE) et Jimmy Roussel (Professeur en CPGE).

Ce sujet comporte deux parties entièrement indépendantes, portant respectivement sur la mécanique et sur l'électromagnétisme.

- Dans la première partie, on étudie la trajectoire d'un volant de badminton. On s'intéresse en particulier à la portée d'un tir de badminton. Le mouvement du volant ne pouvant pas toujours être calculé analytiquement, on est amené à décomposer le mouvement en plusieurs phases pendant lesquelles différentes approximations s'appliquent. Ces approximations sont discutées en détail, et leurs prédictions sont confrontées à la trajectoire expérimentale d'un volant.
- Dans la deuxième partie, on s'intéresse à un hypothétique terme supplémentaire dans les équations de Maxwell. En particulier, on montre que ce terme supplémentaire peut être relié à une hypothétique masse non nulle du photon. On se demande si ce terme supplémentaire peut avoir des conséquences mesurables, ce qui constituerait ainsi une mesure indirecte de la masse du photon. Dans ce contexte, deux types de mesures expérimentales sont considérées. L'une est fondée sur la mesure du temps de propagation des signaux provenant d'un pulsar, objet astronomique lointain envoyant des bouffées d'ondes électromagnétiques régulières. L'autre est fondée sur des mesures de tension au sein d'une sphère métallique. À l'issue de cette partie, on est amené à estimer laquelle de ces deux méthodes permettrait la mesure la plus fine du terme supplémentaire considéré.

La première partie de ce sujet est relativement proche du cours (mouvement dans le champ de pesanteur uniforme, influence de la résistance de l'air), tandis que la deuxième nécessite un certain recul. De manière générale, les calculs demandés ne sont ni difficiles, ni longs. La difficulté du sujet réside plutôt dans l'autonomie dont les candidats devaient faire preuve pour certaines questions (détermination de la démarche à suivre et des théorèmes à appliquer sans que le sujet le précise).

Une autre difficulté, de forme cette fois, est de parvenir à conserver en permanence une vision d'ensemble du problème et des méthodes employées. Ceci est particulièrement vrai pour la première partie, tout au long de laquelle une série d'approximations est continuellement discutée. Ce sujet constitue un bon entraînement à la mécanique et à l'électromagnétisme, et représente une bonne occasion d'apprendre à analyser un sujet de concours et comprendre sa logique interne.

Indications

Partie I

I.1 Afin de trouver la portée du tir, appliquer le principe fondamental de la dynamique et obtenir la trajectoire du volant. Chercher ensuite la position à laquelle il touche le sol.

I.6 L'accélération est nulle dans le cas d'un mouvement rectiligne uniforme. Chercher la solution de l'équation du mouvement dans ce cas.

I.8 Remarquer que, dans le cas où l'on néglige le poids, l'accélération est toujours purement tangentielle. En déduire la nature de la trajectoire.

Par ailleurs, afin d'obtenir une équation sur la norme U, prendre le produit scalaire par $\overrightarrow{\mathrm{U}}$ de part et d'autre de l'équation du mouvement.

I.9 On peut estimer la vitesse sur le chronographe en mesurant la distance entre deux points consécutifs et en divisant cette distance par $\Delta t = 50$ ms.

I.10 Prendre en compte le fait que la trajectoire est rectiligne (avec un angle θ_0 par rapport à l'horizontale) afin de trouver la relation entre dx/dt et U.

I.15 Vérifier que la portée du tir est inférieure à celle obtenue à la question I.1, du fait de la force de freinage. On pourra former le ratio de ces deux portées et montrer qu'il est de la forme $\ln(\chi)/(4\chi)$ où χ est une quantité grande devant 1.

I.17 Justifier que la distance recherchée ne peut dépendre que de g et U_∞. Chercher les valeurs de α et β telles que $g^\alpha {\mathrm{U}_\infty}^\beta$ ait la dimension d'une longueur.

I.19 Afin d'estimer le temps de montée, utiliser les résultats des questions I.8 et I.12. Pour le temps de descente, évaluer la hauteur qu'atteint le volant au sommet de sa trajectoire et remarquer que le volant tombe approximativement à vitesse constante depuis cette hauteur.

Partie II

II.3 Afin de trouver la pulsation d'un champ $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ uniforme, utiliser la relation de dispersion dans le cas $k = 0$.

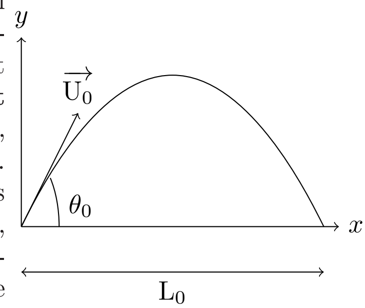
II.5 Appliquer la relation $t = \mathrm{L}/v_{\mathrm{g}}$ pour deux longueurs d'onde différentes et en déduire Δv en fonction du retard Δt entre les deux longueurs d'onde. Prendre en compte le fait que la vitesse de propagation est très proche de c (dans le cas $\mu \ll k$) afin de simplifier l'expression finale, puis composer les incertitudes.

II.9 Remarquer que l'équation (1) n'est valide que dans le vide et que l'équation (2) que dans le cas où les champs sont indépendants du temps. Comparer les équations dans le cas où ces deux conditions sont remplies.

II.11 Afin d'obtenir le champ $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ à l'intérieur de la sphère, intégrer l'équation (2) à l'intérieur d'une surface de contrôle bien choisie, de la même manière que l'on intègre l'équation de Maxwell-Gauss afin d'obtenir le théorème de Gauss.

I. Trajectoire d'un volant de badminton

I.1 Puisqu'on néglige la poussée d'Archimède ainsi que la force de freinage, le volant n'est considéré soumis qu'à la force de pesanteur. Son mouvement est donc uniformément accéléré, et **sa trajectoire est une parabole**. Cette parabole a l'allure ci-contre, sur laquelle on a également indiqué la portée L_0. Afin d'obtenir l'expression de la portée L_0, étudions le mouvement du volant dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. Appliquons le principe fondamental de la dynamique au volant, soumis à la seule force de pesanteur.



$$m\frac{d\overrightarrow{U}}{dt} = m\overrightarrow{g}$$

où $\overrightarrow{g}$ est un vecteur pointant vers le bas : $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{e_y}$. En projetant alors cette relation selon l'axe des x et des y, et en simplifiant la masse m, on obtient

$$\frac{dU_x}{dt} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dU_y}{dt} = -g$$

La vitesse faisant initialement un angle θ_0 avec l'axe des x, les conditions initiales sont $U_x(0) = U_0\cos\theta_0$ et $U_y(0) = U_0\sin\theta_0$. Intégrons les équations différentielles ci-dessus en utilisant ces conditions initiales. On obtient

$$U_x(t) = U_0\cos\theta_0 \qquad \text{et} \qquad U_y(t) = -gt + U_0\sin\theta_0$$

Afin d'obtenir les positions en fonction du temps, intégrons à présent les équations

$$\frac{dx}{dt} = U_x \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{dt} = U_y$$

avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$. On obtient alors

$$x(t) = U_0\cos\theta_0\,t \qquad \text{et} \qquad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + U_0\sin\theta_0\,t$$

Dans le but de trouver la portée L_0, cherchons l'instant t_0 auquel le volant touche le sol ($y(t_0) = 0$). D'après l'expression de $y(t)$ ci-dessus, on a

$$-\frac{1}{2}g{t_0}^2 + U_0\sin\theta_0\,t_0 = 0$$

c'est-à-dire

$$t_0\left(-\frac{1}{2}gt_0 + U_0\sin\theta_0\right) = 0$$

En excluant la solution triviale $t_0 = 0$ correspondant au fait que le volant est considéré initialement au sol, l'instant recherché est

$$t_0 = \frac{2U_0\sin\theta_0}{g}$$

La portée L_0 correspond à la valeur de x à cet instant. En utilisant l'expression de $x(t)$ précédente, on parvient à

$$\boxed{L_0 = x(t_0) = \frac{2{U_0}^2\cos\theta_0\sin\theta_0}{g}}$$

I.2 Dans l'expression précédente, U_0 s'exprime en m.s^{-1} et g en m.s^{-2}, tandis que les sinus et cosinus sont sans dimension. Par conséquent, $2{U_0}^2 \cos\theta_0 \sin\theta_0/g$ s'exprime en mètre, tout comme L_0. **L'expression obtenue est donc bien homogène.** Vérifions cette expression dans plusieurs cas limites :

- **Influence de la vitesse U_0 :** On peut tout d'abord remarquer que lorsque $U_0 = 0$, la portée L_0 est bien nulle (cas du volant sans vitesse initiale, c'est-à-dire qui n'a pas été lancé). Par ailleurs, on observe que la portée L_0 croît de manière monotone avec U_0, ce qui est cohérent. Ainsi, plus on frappe le volant fort, plus il va loin.
- **Influence de l'angle θ_0 :** On observe que pour $\theta_0 = \pi/2$, la portée est nulle, ce qui est à nouveau cohérent car cela correspond à un tir vertical. De même, pour $\theta_0 = 0$, ce qui correspond à un tir au ras du sol, la portée est bien nulle.
- **Influence de la pesanteur g :** On peut constater que lorsque g diminue, la portée L_0 augmente. Cela est cohérent avec le fait que, sur la Lune (où la pesanteur g est plus faible), les astronautes peuvent parcourir de grandes distances en un seul saut.

I.3 On peut remarquer que L_0 peut se réécrire comme

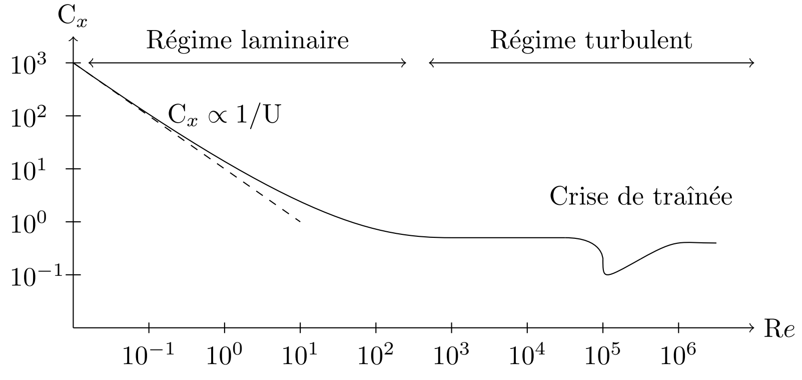
$$L_0 = \frac{{U_0}^2 \sin(2\theta_0)}{g}$$

Le sinus atteignant son maximum pour $2\theta_0 = \pi/2$, la portée est maximale lorsque

$$\boxed{\theta_0 = \frac{\pi}{4}}$$

> On aurait également pu chercher le maximum de L_0 en dérivant son expression par rapport à θ_0 et en cherchant la valeur entre $\theta_0 = 0$ (tir horizontal) et $\theta_0 = \pi/2$ (tir vertical) pour laquelle la dérivée s'annule.

I.4 Considérons l'expression de la force de traînée. La norme du vecteur $\overrightarrow{U}$ s'exprime en m.s^{-1}, S en m^2 et ρ en kg.m^{-3}, et le produit $\rho\, S\, U\, \overrightarrow{U}$ s'exprime donc en kg.m.s^{-2}, c'est-à-dire en newtons. Afin que l'expression de $\overrightarrow{F}$ soit homogène, il faut donc que **C_x soit sans dimension**. Par ailleurs, C_x a l'allure suivante :



I.5 Au début du mouvement, la vitesse vaut $U_0 = 58$ m.s^{-1}, d'où

$$\boxed{Re = \frac{LU_0}{\nu} = 2 \cdot 10^5}$$