X/ENS Maths PC 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par François Lê (ENS Lyon) ; il a été relu par Tristan Poullaouec (Professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (ENS Cachan).

Le sujet s'intéresse à des propriétés vérifiées par les valeurs propres de matrices symétriques réelles. Il est partagé en trois parties dépendantes (ce que ne signale pas l'énoncé) et de proportions inégales.

- Un des objectifs de la première partie est d'établir plusieurs formules faisant le lien entre les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle M et des bornes supérieures ou inférieures de produits scalaires du type $\langle x, \mathrm{M}x\rangle$. Grâce à ces formules, on démontre également la continuité de l'application qui associe à une matrice symétrique réelle son spectre ordonné.
- La deuxième partie considère deux matrices symétriques réelles A et B, dont les valeurs propres sont notées $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ et $b_1 \geqslant \cdots \geqslant b_n$ respectivement. Si $c_1 \geqslant \cdots \geqslant c_n$ sont les valeurs propres de la somme $\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$, le résultat final de la partie est que $c_1 + \cdots + c_j \leqslant a_1 + \cdots + a_j + b_1 + \cdots + b_j$ pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$. On démontre aussi au passage le théorème de Schur, qui énonce que $a_1 + \cdots + a_j \geqslant a_{11} + \cdots + a_{jj}$ pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$, où les a_{ii} sont les coefficients diagonaux de A.
- Pour la troisième partie, on se place dans le cas $n = 2$. Quatre réels a_1, a_2, b_1, b_2 étant fixés, on cherche à déterminer les spectres possibles des sommes de deux matrices symétriques réelles données ayant pour spectres (a_1, a_2) et (b_1, b_2). C'est un segment de droite dont on explicite les extrémités.

Ce sujet est fondé sur un thème d'algèbre linéaire, mais d'autres parties du programme y sont mobilisées. Ainsi, les questions 4d, 5a et 5b se rapportent à la topologie et au calcul différentiel, et les questions 9 et 10c nécessitent d'être au point sur la géométrie élémentaire du plan. En outre, presque l'intégralité des questions font appel à des manipulations sur des bornes inférieures ou supérieures. Il faut être extrêmement vigilant dans ces calculs et rédiger calmement les solutions.

Indications

1b Trouver une matrice diagonale M et un réel λ tels que $s^{\downarrow}(\lambda \mathrm{M}) \neq \lambda s^{\downarrow}(\mathrm{M})$.

2a Utiliser le théorème spectral pour trouver P orthogonale telle que ${}^t\mathrm{P}\,\mathrm{MP}$ soit égale à la matrice diagonale $\mathrm{diag}(m_1, \ldots, m_n)$, puis considérer les colonnes de P.

2b Commencer par majorer $\langle x, \mathrm{M}x\rangle$ par une quantité indépendante de x, puis montrer que cette majoration est atteinte pour un vecteur x particulier.

2c Montrer séparément que les bornes inférieure et supérieure proposées sont égales à m_j. Pour cela, effectuer des calculs analogues à ceux de la question 2b.

3a Penser à la formule de Grassmann.

4a Remarquer que $\langle x, \mathrm{M}x\rangle = \langle x, (\mathrm{M}-\mathrm{L})x\rangle + \langle x, \mathrm{L}x\rangle$. Montrer ensuite que pour tout x normé, $\langle x, (\mathrm{M}-\mathrm{L})x\rangle \geqslant 0$, puis utiliser le résultat de la question 3b pour lier $\langle x, \mathrm{L}x\rangle$ et $\langle x, \mathrm{M}x\rangle$ à ℓ_j et m_j.

4c Appliquer la question 4b à la matrice $\mathrm{L}-\mathrm{M}$ puis utiliser la question 4a pour montrer que $\ell_j \leqslant \|\mathrm{L}-\mathrm{M}\| + m_j$.

5a D'après la question 4c, on a $|\ell_j - m_j| < r$ dès que $\|\mathrm{L}-\mathrm{M}\| < r$. Sachant que les m_i sont tous distincts, utiliser cette remarque pour définir un $r > 0$ tel que, si $\|\mathrm{L}-\mathrm{M}\| < r$, alors les ℓ_j sont aussi tous distincts.

5b Pour clarifier la situation, identifier $\mathcal{S}_2(\mathrm{R})$ à $\mathbb{R}^3$ et montrer que $\mathcal{S}_2^{\dagger}(\mathbb{R})$ s'identifie alors à $\big\{(\lambda, \mu, h) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \neq \mu \quad \text{ou} \quad h \neq 0\big\}$.

6b Utiliser la question 2b et l'égalité $\langle x, \mathrm{C}x\rangle = \langle x, \mathrm{A}x\rangle + \langle x, \mathrm{B}x\rangle$.

6c Se servir de la question 2c ou appliquer la question 6b en remplaçant A et B par $-\mathrm{A}$ et $-\mathrm{B}$.

7a Appliquer d'abord la formule de Grassmann aux sous-espaces $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$.

7b Pour la première partie de la question, trouver, grâce à la question 2c, des sous-espaces $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ associés respectivement à a_j, b_k et c_{j+k-1}, et partir ensuite de l'égalité $\langle x, \mathrm{C}x\rangle = \langle x, \mathrm{A}x\rangle + \langle x, \mathrm{B}x\rangle$. Pour la seconde partie, s'appuyer sur le résultat de la première en remplaçant A et B par $-\mathrm{A}$ et $-\mathrm{B}$.

8a Se souvenir que $\langle x, \mathrm{A}x\rangle \leqslant a_1$ pour tout vecteur x normé.

8b Développer les facteurs du membre de droite de l'inégalité proposée et faire apparaître $f(t_1, \ldots, t_k)$.

8c Grâce à une écriture $\mathrm{A} = \mathrm{PD}\,{}^t\mathrm{P}$ avec P orthogonale, montrer qu'il existe un n-uplet $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{D}_{j,n}$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{j} a_{ii} = f(t_1, \ldots, t_k)$. Conclure à l'aide de la question 8b.

8d Étant donnée une famille $(x_1, \ldots, x_j) \in \mathcal{R}_j$, la compléter en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Considérer alors la matrice de passage de la base canonique à cette base pour trouver une relation de la forme $\langle x_i, \mathrm{A}x_i\rangle = \langle e_i, \mathrm{A}'e_i\rangle$.

9 Dans le cas où A et B sont diagonales, chercher les possibilités pour $s^{\downarrow}(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ et mettre ainsi en évidence deux points distants de $\sqrt{2}(b_1 - b_2)$. Dans le cas général, utiliser les relations données par les questions 6a, 6b, 6c et 7b.

10b Montrer qu'une matrice $\mathrm{B} \in \mathrm{S}(b_1, b_2)$ peut être diagonalisée avec une matrice de passage orthogonale directe et paramétrer alors de telles matrices par $t \in [-\pi, \pi]$.

10c Écrire Σ comme l'image directe de $[\,-\pi\,;\pi\,]$ par une application continue. En paramétrant le segment L par $[\,0\,;1\,]$, trouver ensuite une application continue $[\,-\pi\,;\pi\,] \longrightarrow [\,0\,;1\,]$. Pour conclure, utiliser le fait que l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une application continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.

I. Première partie

1a L'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet,

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \neq \varnothing$ car la matrice nulle est symétrique.
- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors ${}^t(\lambda\mathrm{M}+\mathrm{N}) = \lambda\,{}^t\mathrm{M} + {}^t\mathrm{N} = \lambda\mathrm{M}+\mathrm{N}$, ce qui montre que $\lambda\mathrm{M}+\mathrm{N} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

En tant que sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ hérite d'une structure d'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$). Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ est un espace vectoriel.}}$$

> Dans la plupart des sujets de concours, pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on montre qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

On sait par ailleurs, grâce au cours, que la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est égale à

$$\boxed{\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Enfin, d'après le théorème spectral, toute matrice symétrique réelle M (de taille n) est diagonalisable donc possède en particulier n valeurs propres (éventuellement confondues). Il est ainsi possible de parler du n-uplet $s^{\downarrow}(\mathrm{M})$ de ses valeurs propres ordonnées par ordre décroissant.

$$\boxed{\text{L'application } s^{\downarrow} \text{ est bien définie sur } \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).}$$

> Le théorème spectral énonce que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable et que la diagonalisabilité peut s'effectuer à l'aide d'une matrice de passage orthogonale. Dans cette première question, il suffit d'invoquer la diagonalisabilité, sans parler de matrices orthogonales.

1b Considérons la matrice diagonale $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont $1, 2, \ldots, n$. Puisque les valeurs propres de M sont ses éléments diagonaux, on en déduit que $s^{\downarrow}(\mathrm{M}) = (n, n-1, \ldots, 2, 1)$. Par ailleurs, la matrice $-\mathrm{M}$ est également diagonale. Comme ses éléments diagonaux sont $-1, -2, \ldots, -n$, son spectre ordonné est égal à $s^{\downarrow}(-\mathrm{M}) = (-1, -2, \ldots, -n)$. Cela montre que $s^{\downarrow}(-\mathrm{M}) \neq -s^{\downarrow}(\mathrm{M})$ donc que

$$\boxed{\text{L'application } s^{\downarrow} \text{ n'est pas linéaire.}}$$

> Il est aussi possible de trouver deux matrices symétriques A et B telles que $s^{\downarrow}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \neq s^{\downarrow}(\mathrm{A}) + s^{\downarrow}(\mathrm{B})$. On vérifie par exemple que si
>
> $$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
>
> alors $$s^{\downarrow}(\mathrm{A}) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad s^{\downarrow}(\mathrm{B}) = (-1, 1)$$
>
> d'une part, tandis que $s^{\downarrow}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = (0, 1) \neq s^{\downarrow}(\mathrm{A}) + s^{\downarrow}(\mathrm{B})$ d'autre part.

1c Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Comme rappelé dans la question 1a, M est diagonalisable : il existe une matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ soit une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres $m_1, \ldots, m_n$ de M. De plus, il est toujours possible de supposer que P vérifie

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{pmatrix}$$

On a alors
$$\mathrm{P}^{-1}(-\mathrm{M})\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -m_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m_n \end{pmatrix}$$

ce qui prouve que le spectre de $-\mathrm{M}$ est $\{-m_1, -m_2, \ldots, -m_n\}$. Compte tenu des relations $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_n$, on en déduit que $-m_1 \leqslant -m_2 \leqslant \ldots \leqslant -m_n$. Ainsi,

$$\boxed{s^{\downarrow}(-\mathrm{M}) = (-m_n, -m_{n-1}, \ldots, -m_1)}$$

1d Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \lambda & h \\ h & \mu \end{pmatrix}$ la matrice proposée. Son polynôme caractéristique vaut

$$\begin{aligned} \chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}) &= \mathrm{X}^2 - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{X} + \det(\mathrm{M}) \\ &= \mathrm{X}^2 - (\lambda + \mu)\mathrm{X} + \lambda\mu - h^2 \end{aligned}$$

Le discriminant de ce polynôme caractéristique est

$$\begin{aligned} \Delta &= (\lambda + \mu)^2 - 4(\lambda\mu - h^2) \\ &= \lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2 - 4\lambda\mu + 4h^2 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda\mu + \mu^2 + 4h^2 \\ \Delta &= (\lambda - \mu)^2 + 4h^2 \end{aligned}$$

> Cette dernière expression montre bien que Δ est positif donc que M possède deux valeurs propres (éventuellement confondues) : cela est cohérent avec le théorème spectral.

Les valeurs propres de M sont les racines de χ_{M}, c'est-à-dire

$$\xi = \frac{\lambda + \mu + \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4h^2}}{2} \qquad \text{et} \qquad \xi' = \frac{\lambda + \mu - \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4h^2}}{2}$$

Puisque $\xi \geqslant \xi'$, on en déduit que

$$\boxed{s^{\downarrow}(\mathrm{M}) = \left(\frac{\lambda + \mu + \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4h^2}}{2}, \frac{\lambda + \mu - \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4h^2}}{2}\right)}$$

2a D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P telle que

$$\mathrm{M} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{pmatrix} {}^t\mathrm{P}$$