Mines Maths 1 PC 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Émilie Liboz (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Florence Monna (Docteur en mathématiques) et Benjamin Monmege (Enseignant-chercheur à l'université).

Le sujet introduit une distance entre deux lois de probabilités à valeurs dans $\mathbb{N}$, connue sous le nom de « distance en variation totale » dans les livres. L'objectif du problème est de majorer la distance entre une loi de Poisson et la loi d'une somme S de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli. On suit pour cela la méthode dite de Stein, qui permet par ailleurs de généraliser l'interprétation de la loi de Poisson comme une loi des événements rares.

- La première partie établit des résultats préliminaires sur des séries convergentes et calcule la distance entre deux lois de Bernoulli.
- La deuxième partie caractérise l'ensemble des suites de réels $(p_n^{(\lambda)})_{n\in\mathbb{N}}$ définissant une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.
- La troisième partie est consacrée à la résolution de l'équation de Stein
$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \lambda\, f(n+1) - n\, f(n) = \widetilde{h}(n)$$
où le second membre fait intervenir les $p_n^{(\lambda)}$. On démontre que les suites f solutions sont bornées.
- La quatrième partie démontre la propriété de Lipschitz pour les fonctions solutions f précédentes : elle donne un majorant de l'ensemble des variations $|f(n+1) - f(n)|$ de f pour $n \in \mathbb{N}$. Les notions de borne inférieure et de borne supérieure interviennent à plusieurs reprises.
- Enfin, la cinquième partie applique les résultats précédents pour majorer la distance entre la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ et la loi de S. Elle fait appel à des outils de base sur les variables aléatoires finies : espérance, indépendance, théorème de transfert.

La majorité des questions portent sur les séries numériques : étude de la convergence, calculs sur les sommes de séries convergentes. Les probabilités n'apparaissent que dans la dernière partie. L'ensemble est très calculatoire et assez long. À la difficulté technique s'ajoute la forte dépendance des questions et des parties entre elles. Ce sujet permet à la fois de faire le point sur les séries numériques et de s'entraîner à suivre le fil d'un énoncé, c'est-à-dire à comprendre où il nous emmène et par quel chemin.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Indications

Partie I

3 Majorer f afin de comparer le terme général de cette série à celui d'une série convergente.

Partie II

6 Considérer $f = \mathbf{1}_{\{n_0\}}$ pour $n_0 \in \mathbb{N}$.

Partie III

7 Raisonner par analyse-synthèse. Utiliser la formule (**3**) de l'énoncé pour construire une infinité d'éléments de $\mathcal{S}_h$, en remarquant que la condition ne concerne que les $n > 0$.

8 Calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \widetilde{h}(k) \dfrac{\lambda^k}{k!}$.

9 Utiliser la formule de la question 8 en majorant $\widetilde{h}$.

Partie IV

10 Utiliser la formule de la question 7.

11 Exploiter le résultat de la question 8.

12 Utiliser les formules des questions 10 et 11.

13 Attention, la formule donnée pour $\Delta f_0(0)$ est fausse.

14 Distinguer les cas $n \neq m$ et $n = m$ pour utiliser les questions 12 et 13.

15 Comparer $\widetilde{h}$ et $\widetilde{h_+}$ (les notations utilisées sont celles définies dans l'énoncé au début de la partie III).

16 Majorer h_+ afin de comparer le terme général de cette série à celui d'une série convergente en utilisant la formule de la question 10.

17 Utiliser le fait que $f_m \in \mathcal{S}_{\mathbf{1}_{\{m\}}}$.

18 Remarquer que, ici, f est une fonction quelconque de $\mathcal{S}_h$ et chercher à la relier à la fonction de la question 17.

Partie V

19 Distinguer les cas $\mathrm{X}_k = 0$ et $\mathrm{X}_k = 1$ pour la première égalité. Utiliser l'indépendance des X_k pour la deuxième.

20 Remplacer λ par $\sum\limits_{k=1}^{n} r_k$ et S par $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$ dans le membre de gauche et utiliser les formules obtenues à la question 19.

21 Appliquer le théorème du transfert et utiliser le fait que $f_{\mathrm{A}} \in \mathcal{S}_{\mathbf{1}_{\mathrm{A}}}$ pour calculer $\mathrm{E}\left(\lambda f_{\mathrm{A}}(\mathrm{S}+1) - \mathrm{S} f_{\mathrm{A}}(\mathrm{S})\right)$ puis prendre la borne supérieure sur $\mathrm{A} \subset \mathbb{N}$.

22 Appliquer les résultats des questions 20 et 21 pour exprimer $\mathrm{dist}(\mathrm{loi}(\mathrm{S}), \mathrm{P}_\lambda)$ en fonction de f_{A} puis utiliser l'inégalité (**5**).

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

I. Préliminaires

1 La série numérique $\sum \dfrac{\lambda^n}{n!}$ est convergente de somme e^{λ}. La suite $\left(\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$ appartient donc à $\mathcal{P}$ car pour tout $n \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!} \geqslant 0$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{Pour } c = \mathrm{e}^{-\lambda}\text{, la suite } \left(c\frac{\lambda^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0} \text{ appartient à } \mathcal{P}.}$$

2 Pour p et $q \in [\,0\,;1\,]$, posons $p_0 = 1-p$, $p_1 = p$, $q_0 = 1-q$, $q_1 = q$ et, pour tout $n \geqslant 2$, $p_n = q_n = 0$. Alors, pour $\mathrm{A} \subset \mathbb{N}$:

$$\sum_{n\in\mathrm{A}} p_n - \sum_{n\in\mathrm{A}} q_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \{0,1\} \subset {}^{\mathrm{c}}\mathrm{A} \\ q-p & \text{si} \quad 0 \in \mathrm{A},\ 1 \notin \mathrm{A} \\ p-q & \text{si} \quad 1 \in \mathrm{A},\ 0 \notin \mathrm{A} \\ 0 & \text{si} \quad \{0,1\} \subset \mathrm{A} \end{cases}$$

Ainsi, $$\sup_{\mathrm{A}\subset\mathbb{N}} \left|\sum_{n\in\mathrm{A}} p_n - \sum_{n\in\mathrm{A}} q_n\right| = |p-q|$$

soit $$\boxed{\mathrm{dist}\Big((1-p,p,0,\ldots),(1-q,q,0,\ldots)\Big) = |p-q|}$$

3 Puisque $f \in \mathcal{F}$, il existe $\mathrm{M} > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(n)| \leqslant \mathrm{M}$. De plus, si $\mathrm{P} \in \mathcal{P}$, alors pour tout entier naturel n, on a $p_n \geqslant 0$ de sorte que $|f(n)p_n| \leqslant \mathrm{M}p_n$. Or $\mathrm{M}p_n$ est le terme général d'une série convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série numérique $\sum f(n)p_n$ est absolument convergente et par conséquent

$$\boxed{\text{La série numérique } \textstyle\sum f(n)p_n \text{ est convergente.}}$$

II. Caractérisation

4 Soit $\mathrm{M} > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(n)| \leqslant \mathrm{M}$. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$|nf(n)p_n^{(\lambda)}| \leqslant \mathrm{M}\mathrm{e}^{-\lambda} n\frac{\lambda^n}{n!} = \mathrm{M}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$

Or le membre de droite est le terme d'une série convergente (on reconnaît le terme général de la série exponentielle). Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série numérique $\sum nf(n)p_n^{(\lambda)}$ est absolument convergente, d'où

$$\boxed{\text{La série numérique } \textstyle\sum nf(n)p_n^{(\lambda)} \text{ est convergente.}}$$

5 Tout d'abord, d'après la question 4, la série $\sum nf(n)p_n^{(\lambda)}$ est convergente. Ensuite, la suite P_λ est un élément de $\mathcal{P}$ d'après la question 1 et donc, la fonction f étant bornée, par le même raisonnement que celui de la question 3, on montre que la série $\sum f(n+1)p_n^{(\lambda)}$ est convergente. Les sommes $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(n+1)p_n^{(\lambda)}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} nf(n)p_n^{(\lambda)}$ sont alors bien définies. De plus, à l'aide du changement d'indice $n = k+1$, on obtient

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n f(n) p_n^{(\lambda)} = \sum_{n=1}^{+\infty} n f(n) \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) f(k+1) \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$$

soit
$$\sum_{n=0}^{+\infty} n f(n) p_n^{(\lambda)} = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} f(k+1) \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

En réindexant la deuxième somme par n au lieu de k, on peut conclure que

$$\boxed{\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1) p_n^{(\lambda)} = \sum_{n=0}^{+\infty} n f(n) p_n^{(\lambda)}}$$

6 Soit $\mathrm{Q} = (q_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{P}$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{F}$, on ait

$$\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1) q_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n f(n) q_n$$

En sélectionnant $f = 1_{\{n_0\}}$ pour $n_0 \in \mathbb{N}^*$ (la fonction indicatrice définie dans l'introduction du sujet), l'identité vérifiée par Q devient :

$$\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{n_0\}}(n+1) q_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n \mathbf{1}_{\{n_0\}}(n) q_n$$

Or, $\mathbf{1}_{\{n_0\}}(n+1) \neq 0$ si et seulement si $n = n_0 - 1$ donc cette égalité est équivalente à $\lambda q_{n_0-1} = n_0 q_{n_0}$. La suite $(q_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie alors

$$\forall\ n \geqslant 0 \quad q_{n+1} = \frac{\lambda}{n+1} q_n$$

Montrons par récurrence sur n que la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \quad q_n = q_0 \frac{\lambda^n}{n!}$$

est vraie pour tout entier n.

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est évidemment vraie.
- $\underline{\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)}$: si $q_n = q_0 \lambda^n / n!$ pour un n donné, alors

  $$q_{n+1} = \frac{\lambda}{n+1} q_n = \frac{\lambda}{n+1} \frac{\lambda^n}{n!} q_0 = \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} q_0$$

  ce qui montre que la propriété est vraie au rang $n+1$.
- <u>Conclusion</u> : $$\forall n \in \mathbb{N} \quad q_n = q_0 \frac{\lambda^n}{n!}$$

De plus, la suite Q est un élément de $\mathcal{P}$ donc, d'après la question 1, $q_0 = \mathrm{e}^{-\lambda}$ ce qui implique que

$$\boxed{\text{Les suites Q et } \mathrm{P}_\lambda \text{ sont égales.}}$$

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .