Mines Maths 1 MP 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Gilbert et Florence Monna (Professeur en CPGE et Docteur en mathématiques) ; il a été relu par Pierre-Yves Bienvenu (ENS Ulm) et Nicolas Martin (Professeur agrégé).

Le problème est consacré à l'étude d'une équation différentielle du second ordre avec des conditions initiales, mais il s'agit d'un problème de Sturm-Liouville et non d'un problème usuel de Cauchy, ce qui donne une certaine originalité au sujet.

La méthode utilisée n'est pas classique non plus en classes préparatoires puisque l'on utilise des opérateurs de Volterra, qui sont introduits dans la partie A. On étudie alors un opérateur symétrique défini positif dans un espace vectoriel euclidien de dimension infinie en déterminant son spectre, et on relie les vecteurs propres de l'opérateur aux solutions d'une équation différentielle.

La partie B consiste en la démonstration du théorème de Weierstrass : toute fonction réelle définie et continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de polynômes, en utilisant les très classiques polynômes de Bernstein. L'originalité vient de l'utilisation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour établir la majoration technique sur les polynômes de Bernstein, qui permet d'achever la démonstration de la convergence uniforme par la découpe usuelle. Cette intervention des probabilités, nouvellement introduites au programme cette année, à un endroit où l'on ne les attendait pas, est très intéressante.

La partie suivante a pour but de déterminer un développement en série trigonométrique, appelée aussi série de Fourier. Les séries de Fourier ont disparu du programme, mais le sujet utilise une suite orthonormée totale dont l'existence est montrée par le théorème de Weierstrass trigonométrique qui se déduit du résultat de la partie précédente. La détermination effective de la série trigonométrique (question 11) nécessite tout de même quelques calculs...

Dans la dernière partie, dont certaines questions sont difficiles, on utilise les outils construits jusque-là pour étudier l'équation différentielle avec les conditions de Sturm-Liouville, en établissant une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit solution. Ceci permet de construire une solution dans un cas (mais on n'aborde pas la question de son unicité), de trouver une infinité de solutions dans un autre cas, et on termine par un dernier cas où il n'y a pas de solution, ce qui démarque ce problème de Sturm-Liouville d'un problème de Cauchy.

En résumé, c'est un problème très intéressant qui utilise deux nouveautés du programme, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et les suites orthonormées totales ainsi que de nombreux chapitres. Il ne peut être traité dans son ensemble qu'en fin de seconde année.

Indications

Partie A

1 Utilisez une intégration par parties.

2 Pour la symétrie, cherchez à utiliser la question précédente.

3 Pour montrer que la fonction f_λ est de classe $\mathcal{C}^2$, pensez qu'une primitive d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. Il suffit ensuite de dériver des fonctions qui sont définies comme des primitives.

4 Commencez par résoudre l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre obtenue à la question précédente, puis utilisez les conditions initiales sur la solution générale.

Partie B

6 Appliquez l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire Z_n puis interprétez l'évènement $\{|\mathrm{Z}_n - \mathrm{E}(\mathrm{Z}_n)| \geqslant \alpha\}$ comme une réunion disjointe d'évènements dont on exprime les probabilités.

7 Utilisez le théorème de transfert, puis observez que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

soit par un argument probabiliste, soit par un argument algébrique. Utilisez ensuite le théorème de Heine pour déterminer un réel positif α et faites une découpe de la somme en séparant les indices tels que $\left|\dfrac{k}{n} - x\right| \geqslant \alpha$ et les autres.

Partie C

8 On peut procéder par récurrence.

9 Appliquez le théorème de Weierstrass à la fonction définie sur $[-1,1]$ par

$$g(x) = f(\operatorname{Arccos}(x))$$

10 Utilisez une propriété des suites totales que vous avez vue en cours, puis la relation de comparaison entre les normes $\| \ \|_{\mathrm{G}}$ et $\| \ \|_\infty$, pour conclure avec l'unicité de la limite pour la norme $\| \ \|_{\mathrm{G}}$.

11 Les calculs sont un peu longs... Pour conclure, démontrez la convergence normale pour permuter la somme et l'intégrale, puis ramenez-vous à la question précédente.

12 On peut partir du membre de droite en séparant l'intégrale en trois, puis en faisant une intégration par parties en introduisant la primitive $\mathrm{V}(f)$ de f.

Partie D

13 Utilisez la question 4 au lieu de refaire les calculs.

14 Pour une implication, dérivez. Pour l'autre, intégrez, mais en utilisant la bonne primitive et en tenant compte des conditions initiales. Pour la dernière égalité, utilisez la question 12.

15 Posez la fonction $g = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \phi_n \rangle \phi_n$ et montrez qu'elle vérifie la condition suffisante de la question 14.

16 Pour trouver une solution, modifiez celle utilisée à la question précédente et, pour montrer qu'il n'y a pas de solution, montrez que la condition nécessaire de la question 14 n'est vérifiée par aucune fonction.

A. Opérateurs de Volterra

1 Par définition du produit scalaire sur E, on a, pour tout couple $(f, g) \in \mathrm{E}^2$

$$\langle \mathrm{V}(f), g\rangle = \int_0^{\pi/2} \mathrm{V}(f)(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Intégrons par parties en posant

$$\begin{cases} u = \mathrm{V}(f), & u' = f \\ v' = g, & v = -\mathrm{V}^*(g) \end{cases}$$

puisque, ainsi que l'énoncé le faisait remarquer, $\mathrm{V}(f)$ et $-\mathrm{V}^*(g)$ sont des primitives de f et g, donc sont de classe $\mathcal{C}^1$. On obtient

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{V}(f)(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{V}(f)(x)\mathrm{V}^*(g)(x)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} f(x)\mathrm{V}^*(g)(x)\,\mathrm{d}x$$

La partie intégrée est nulle puisque $\mathrm{V}(f)(0) = \mathrm{V}^*(g)\,(\pi/2) = 0$. Il en résulte que

$$\boxed{\forall\,(f, g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle \mathrm{V}(f), g\rangle = \langle f, \mathrm{V}^*(g)\rangle}$$

2 D'après la propriété de symétrie du produit scalaire, on a, pour tout $(f, g) \in \mathrm{E}^2$,

$$\langle \mathrm{V}^*(\mathrm{V}(f)), g\rangle = \langle g, \mathrm{V}^*(\mathrm{V}(f))\rangle$$

et d'après la question précédente,

$$\langle g, \mathrm{V}^*(\mathrm{V}(f))\rangle = \langle \mathrm{V}(g), \mathrm{V}(f)\rangle = \langle \mathrm{V}(f), \mathrm{V}(g)\rangle = \langle f, \mathrm{V}^*(\mathrm{V}(g))\rangle$$

Finalement, $\qquad \forall\,(f, g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(f), g\rangle = \langle f, \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(g)\rangle$

d'où $\qquad \boxed{\mathrm{V}^* \circ \mathrm{V} \text{ est un opérateur symétrique.}}$

Soit f un élément de E ; d'après la question 1,

$$\langle \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(f), f\rangle = \langle \mathrm{V}(f), \mathrm{V}(f)\rangle$$

qui est positif, par propriété du produit scalaire. De plus, $\langle \mathrm{V}(f), \mathrm{V}(f)\rangle = 0$ entraîne que $\mathrm{V}(f) = 0$, toujours par propriété du produit scalaire, donc sa dérivée, qui est la fonction f, est nulle. On a démontré que $\langle \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(f), f\rangle \geqslant 0$ et $\langle \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(f), f\rangle = 0 \implies f = 0$. Ainsi,

$$f \neq 0 \implies \langle \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(f), f\rangle > 0$$

On conclut que $\boxed{\text{L'opérateur symétrique } \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V} \text{ est défini positif.}}$

Soit f un vecteur propre de l'opérateur $\mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}$ et λ la valeur propre associée. Un vecteur propre n'étant pas nul, on a $f \neq 0$, ce qui entraîne

$$\langle \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(f), f\rangle > 0$$

ainsi que $\qquad \langle \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(f), f\rangle = \langle \lambda f, f\rangle = \lambda\langle f, f\rangle$

On a donc $\lambda\langle f, f\rangle > 0$, ce qui implique $\lambda > 0$ puisque $\langle f, f\rangle > 0$. On en conclut que

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de l'opérateur } \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V} \text{ sont strictement positives.}}$$

> C'est toujours le cas pour un opérateur défini positif.

3 Par définition d'une valeur propre

$$\mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$$

La fonction f_λ est de classe $\mathcal{C}^0$, la fonction $\mathrm{V}(f_\lambda)$, qui en est une primitive, est de classe $\mathcal{C}^1$ et la fonction $-\mathrm{V}^*(\mathrm{V}(f_\lambda))$, qui est une primitive de la fonction $\mathrm{V}(f_\lambda)$ de classe $\mathcal{C}^1$, est de classe $\mathcal{C}^2$. On en déduit que

$$\boxed{\text{La fonction } f_\lambda \text{ est de classe } \mathcal{C}^2.}$$

En dérivant l'égalité $\lambda f_\lambda = \mathrm{V}^*(\mathrm{V}(f_\lambda))$, on obtient

$$\lambda {f_\lambda}' = -\mathrm{V}(f_\lambda)$$

puis, en dérivant une nouvelle fois, $\lambda {f_\lambda}'' = -f_\lambda$

D'après la question précédente, λ n'est pas nul, donc la fonction f_λ vérifie

$$\boxed{{f_\lambda}'' + \frac{1}{\lambda} f_\lambda = 0}$$

On a les égalités, pour tout x élément de $[\,0\,;\pi/2\,]$,

$$\mathrm{V}^*(\mathrm{V}(f_\lambda))(x) = \lambda f_\lambda(x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(f_\lambda)(x) = -\lambda {f_\lambda}'(x)$$

En donnant à x la valeur $\pi/2$ dans la première égalité, on arrive à

$$\lambda f_\lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{V}^*(\mathrm{V}(f_\lambda))\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

d'où $f_\lambda\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ puisque λ n'est pas nul. En donnant à x la valeur 0 dans la deuxième égalité, on obtient

$$\lambda {f_\lambda}'(0) = -\mathrm{V}(f_\lambda)(0) = 0$$

d'où

$$\boxed{f_\lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad {f_\lambda}'(0) = 0}$$

4 L'équation différentielle $y'' + (1/\lambda)y = 0$ du second ordre à coefficients constants a pour équation caractéristique $r^2 + 1/\lambda = 0$, de racines $r = \pm\, i/\sqrt{\lambda}$ ($\lambda > 0$). Une base de solutions de l'équation différentielle est formée des fonctions

$$x \longmapsto \cos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

La solution générale de l'équation est définie par

$$y(x) = \alpha\cos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + \mu\sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) \qquad (\alpha,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

En dérivant, $$y'(x) = -\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

La condition initiale $y'(0) = 0$ donne donc $\mu = 0$, d'où

$$y(x) = \alpha\cos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

La condition initiale $y\,(\pi/2) = 0$ s'écrit alors

$$\cos\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right) = 0$$