Pré-sujet de probabilités des Mines 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Walter Appel (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Sophie Rainero (Professeur en CPGE) et Céline Chevalier (Enseignant-chercheur à l'université).

Voici le sujet que le concours des Mines propose comme « sujet 0 », et qui donne une idée du ton des futures épreuves traitant de probabilités.

Le problème porte sur la modélisation d'une queue de clients, lorsque le nombre de clients arrivant à chaque instant n suit une loi fixée. À l'aide de la *fonction caractéristique*, on établit notamment une loi « limite » pour le nombre de clients restant à servir.

- La première partie fait démontrer quelques généralités sur la fonction caractéristique d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Les propriétés prouvées sont des grands classiques de la théorie des probabilités qui, si elles n'apparaissent pas dans le programme, seront très probablement réintroduites dans de nombreuses épreuves.

  On montre notamment que la fonction caractéristique caractérise la loi : deux variables aléatoires (à valeurs dans $\mathbb{N}$, ici) ont même loi si et seulement si elles ont même fonction caractéristique.
- Dans la deuxième partie, on montre quelques propriétés utiles sur les variables aléatoires A_n (nombre de clients arrivant entre l'instant n et l'instant $n+1$), censées toutes suivre la même loi qu'une variable A, et sur les variables aléatoires X_n (nombre de clients dans la queue).
- La troisième partie permet de montrer que, sous certaines hypothèses supplémentaires, la suite des fonctions caractéristiques des X_n converge simplement vers une fonction θ donnée.
- Enfin, dans la dernière partie, on montre que les hypothèses de la partie précédentes sont bien vérifiées lorsque la loi commune aux A_n est une certaine loi géométrique, et on identifie la « loi limite » de la suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

L'épreuve est d'une longueur très raisonnable et de nombreuses questions sont des applications assez directes du cours de probabilités du nouveau programme ; les principales difficultés sont finalement plutôt du domaine de l'analyse, les techniques de sommation et de majoration devant être correctement maîtrisées.

Indications

Partie 1

1 Écrire $\phi_{\mathrm{X}}(t)$ sous la forme de la somme d'une série en utilisant la formule de transfert. Invoquer ensuite le théorème de continuité pour les séries de fonctions.

2 Montrer que, pour tout entier k, $\mathrm{I}_k = \mathrm{P}(\mathrm{X} = k)$ et en déduire que X et Y ont la même loi.

3 Utiliser le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions.

4 L'énoncé présente une légère coquille, la variable intéressante est $\mathrm{Z} = \mathrm{Y} - 1$, et non $\mathrm{Y} + 1$.

5 Procéder par disjonction des cas, selon la valeur de X_n.

Partie 2

6 Si $\mathrm{M} > 0$, choisir un réel $\mathrm{N} \geqslant \mathrm{M}$, et montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{X}_n > \mathrm{M}) \geqslant \mathrm{P}(\mathrm{A} > \mathrm{N}) > 0$.

7 Procéder par disjonction des cas, selon la valeur de X_n.

8 Remarquer que X_n est une fonction de $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n)$ pour $n \geqslant 1$.

Partie 3

10 Partir de la décomposition $1 = \mathbb{1}_{(\mathrm{X}_n > 0)} + \mathbb{1}_{(\mathrm{X}_n = 0)}$, multiplier par $\mathrm{e}^{\,it\mathrm{X}_{n+1}}$ puis passer aux espérances.

13 Forcer l'apparition de $\phi_{\mathrm{X}_n}(t) - \theta(t)$; le préfacteur est, en module, égal à $\phi_{\mathrm{A}}(t)$ que l'on pourra donc identifier à β_t. Après application de l'inégalité triangulaire, il reste un terme qui doit tendre vers 0 quand n tend vers l'infini, et qui devient donc « epsilonesque » pour n suffisamment grand.

14 La propriété est évidente lorsque $t \in 2\pi\mathbb{Z}$. Dans le cas contraire, montrer que si $\beta \in \,]\,0\,;1\,[$, alors toute suite positive vérifiant « pour tout ε, il existe un entier à partir duquel $v_{n+1} \leqslant \beta v_n + \varepsilon$ » converge vers 0.

Partie 4

15 Exprimer ϕ_{A} sous la forme d'une série trigonométrique puis utiliser la question 2.

16 Ne pas oublier de montrer que A est à valeurs dans $\mathbb{N}$, que $\mathrm{P}(\mathrm{A} \geqslant n) > 0$ pour tout entier n, que $\left|\phi_{\mathrm{A}}(t)\right| < 1$ pour tout $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, et que $\mathrm{E}[\mathrm{A}] = \rho \in \,]\,0\,;1\,[$.

17 L'énoncé ne le précise pas, mais la variable Y est une variable dont la fonction caractéristique est θ.

1. Fonction caractéristique

1 La formule de transfert permet d'expliciter l'espérance de $\mathrm{e}^{\,it\mathrm{X}}$, qui existe bien puisque $\mathrm{e}^{\,it\mathrm{X}}$ est bornée en module par 1 :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad \phi_{\mathrm{X}}(t) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\,it\mathrm{X}}] = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, \mathrm{e}^{\,int}$$

où l'on a noté $p_n = \mathrm{P}(\mathrm{X} = n)$ pour tout entier n. Définissons la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_n : t \mapsto p_n\,\mathrm{e}^{\,int}$. Chaque fonction u_n est continue, bornée et $\|u_n\|_\infty = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, la série de fonctions $\sum u_n$ converge donc normalement et, en particulier, elle converge uniformément. Un théorème du cours assure alors que sa somme est continue. En conclusion,

$$\boxed{\phi_{\mathrm{X}} \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

> Lorsqu'une série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement et a pour somme une fonction F, alors certaines propriétés sont conservées par passage à la limite simple, comme la périodicité, la croissance, la convexité (en filière MP)... et d'une manière générale toutes les propriétés qui ne demandent qu'à comparer des valeurs de F en un nombre fini de points (propriétés *ponctuelles*).
> En revanche, la continuité des u_n et la convergence simple n'assurent pas en général la continuité de F : on doit montrer que la série converge uniformément (par exemple parce qu'elle converge normalement), au moins localement, c'est-à-dire sur tout segment de l'intervalle de définition.

Enfin, chaque u_n est une fonction 2π-périodique ; notamment, puisque toutes les séries convergent, on a pour tout réel t :

$$\phi_{\mathrm{X}}(t + 2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t + 2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = \phi_{\mathrm{X}}(t)$$

donc
$$\boxed{\phi_{\mathrm{X}} \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}}$$

> Puisque ϕ_{X} est continue et 2π-périodique, on en déduit qu'elle est bornée. Cependant, il est aisé de montrer ce résultat directement : grâce à la convergence absolue de la série de fonctions, on a
>
> $$\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad \left|\phi_{\mathrm{X}}(t)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \left|p_n\,\mathrm{e}^{\,int}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$$
>
> Ce résultat reste d'ailleurs vrai lorsque X est une variable aléatoire quelconque (pas forcément à valeurs dans $\mathbb{N}$).

2 Soit k un entier naturel. En écrivant

$$\forall\, t \in [\,0\,;2\pi\,] \qquad \phi_{\mathrm{X}}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} = n)\,\mathrm{e}^{\,int}$$

on obtient
$$\mathrm{I}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{X} = n)\,\mathrm{e}^{\,i(n-k)t}}_{=v_n(t)}\,\mathrm{d}t$$

Puisque $\|v_n\|_\infty = \mathrm{P}(\mathrm{X} = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série numérique $\sum\|v_n\|_\infty$ converge, c'est-à-dire que la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement, et donc uniformément. Ainsi, on peut intégrer terme à terme dans l'égalité précédente :

$$\mathrm{I}_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} = n) \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(n-k)t}\,\mathrm{d}t$$

Or, un résultat extrêmement classique est le suivant :

$$\forall\, p, q \in \mathbb{Z} \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(p-q)t}\,\mathrm{d}t = \delta_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, si $p = q$, on intègre la fonction constante égale à 1, et si $p \neq q$, on sait calculer une primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(p-q)t}$, qui est $t \mapsto \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(p-q)t}/\mathrm{i}(p-q)$ et est donc 2π-périodique. En conclusion, on a donc montré que

$$\mathrm{I}_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} = n)\ \delta_{n,k} = \mathrm{P}(\mathrm{X} = k)$$

Ceci étant valable pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a donc déduit la loi de X de la connaissance de sa fonction caractéristique. Notamment, si X et Y ont même fonction caractéristique, alors pour tout entier naturel k, on a

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y} = k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\mathrm{Y}}(t)\,\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \mathrm{P}(\mathrm{X} = k)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Deux variables aléatoires à valeurs dans } \mathbb{N} \text{ ayant}\\ \text{même fonction caractéristique ont même loi.}\end{array}}$$

> Le but de cette question est de montrer que *la fonction caractéristique caractérise la loi*, c'est-à-dire que la connaissance de ϕ_{X} suffit (du moins du point de vue théorique) à déterminer entièrement la loi de X. Notamment, deux variables aléatoires ayant même fonction caractéristique ont même loi. La démonstration générale de cette propriété est assez délicate ; s'agissant de lois discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$, elle est beaucoup plus facile.

3 On suppose que « $\mathrm{E}[\mathrm{X}] < +\infty$ », c'est-à-dire que X admet une espérance. On rappelle que l'on a noté, dans la question 1, $u_n : t \mapsto p_n\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}nt}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; ce sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. On peut alors montrer que ϕ_{X} est de classe $\mathscr{C}^1$ en prouvant la convergence uniforme de la série des dérivées $\sum u_n'$. Puisque

$$u_n' : t \longmapsto \mathrm{i}n\,p_n\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}nt}$$

on a donc $$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n'\|_\infty = n\,p_n$$

Or, dire que X admet une espérance, c'est précisément dire que la série $\sum n\,p_n$ converge. Ainsi, $\sum u_n'$ converge normalement, et donc uniformément. Le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions assure que

$$\boxed{\phi_{\mathrm{X}} \text{ est de classe } \mathscr{C}^1}$$

et que, de plus $$\phi_{\mathrm{X}}' : t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{i}n\,p_n\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}nt}$$

Notamment, $$\boxed{\phi_{\mathrm{X}}'(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{i}n\,p_n = \mathrm{i}\,\mathrm{E}[\mathrm{X}]}$$