E3A Maths B PSI 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Yvon Vignaud (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Céline Chevalier (Enseignant-chercheur à l'université) et Nicolas Martin (ENS Lyon).

Ce sujet est composé de trois exercices indépendants. Bien que de nombreuses questions soient des applications directes du cours, il comporte quelques questions difficiles d'un point de vue théorique ou technique et couvre des notions très diverses du programme de deuxième année : réduction de matrices, intégrales impropres convergentes, intégrales à paramètre, séries numériques, séries de Fourier, séries de fonctions, fonctions de plusieurs variables, équations différentielles linéaires.

- Dans le premier exercice, on calcule l'exponentielle M d'une matrice carrée d'ordre 3, avant de déterminer à quelle condition M^2 représente une symétrie vectorielle.
- Dans le deuxième exercice, on commence par développer en série de Fourier la fonction $x \mapsto |\sin(x)|$. Ce développement permet ensuite d'écrire
$$\rho_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(mx)|}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$
comme la somme d'une série numérique. Enfin, on obtient un équivalent de ρ_m à l'aide d'un encadrement par des sommes partielles de séries numériques, sur le principe de la comparaison entre séries et intégrales. Le fait que les séries manipulées dépendent d'un paramètre m ne change pas les méthodes mais peut représenter une difficulté en soi.
- Le troisième exercice s'intéresse aux équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n. On établit d'abord trois formules utiles pour la suite : la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral, une formule de convolution, puis une formule de dérivation pour une fonction de la forme
$$\mathrm{F}(x) = \int_c^{\mathrm{G}(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$
Après ces préliminaires, on obtient à l'issue de la première partie une expression des solutions de l'équation $y^{(n)} = \varphi$. Dans la deuxième partie, on trouve une solution particulière
$$g : x \mapsto \int_0^x s(x-t)\psi(t)\,\mathrm{d}t$$
de l'équation $$y^{(n)} + c_1 y^{(n-1)} + \ldots + c_n y = \psi$$
à partir d'une solution s de l'équation homogène associée. Enfin, l'exercice se termine par une application de la deuxième partie à la résolution explicite de l'équation différentielle $y'' + y = \alpha$ avec α une fonction triangle.

Indications

Exercice 1

2 Factoriser le polynôme caractéristique de A.

3 Discuter selon la parité de k.

4 Montrer que $(\mathrm{I}_3, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2)$ est une base de F.

6 Déterminer les limites des composantes de S_n.

9 Remarquer que M^4 est une rotation.

Exercice 2

P.1 Séparer les contributions pour k pair ou impair dans $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k}$.

P.2 Utiliser le critère de Riemann.

1.2 Linéariser les fonctions trigonométriques.

2 Exploiter le théorème de convergence normale des séries de Fourier.

3 Appliquer le résultat de la question 2 en $x = 0$.

4 Utiliser $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$ ainsi que les questions 2 et 3.

5.1 Montrer que l'intégrande se prolonge par continuité.

5.2 Obtenir une somme télescopique via $2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$.

5.4 Utiliser le théorème d'intégration terme à terme à la série de fonctions $\sum u_n$ où

$$u_n : x \longmapsto \frac{8}{\pi(4n^2-1)} \, \frac{\sin^2(mnx)}{\sin x}$$

6.1 Déterminer un équivalent de $\sin x - x$ lorsque x tend vers 0.

7.3 Appliquer la relation de Chasles.

7.4 Encadrer v_n entre $2/(n+1)\pi$ et $2/n\pi$.

Exercice 3

P.1.b Utiliser un changement de variables affine.

P.3.1 Pour la dérivée partielle selon x, appliquer le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale ; on utilisera notamment l'hypothèse « f de classe $\mathscr{C}^1$ par rapport à x » qui signifie ici

$$(x,t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ est continue sur } \mathrm{K} = [\,a\,;b\,] \times [\,c\,;d\,]$$

P.3.2 Dériver une composée de fonctions de plusieurs variables.

II.2 Intégrer par parties.

II.3 Appliquer la formule de dérivation de la question P.3.2.

II.4 Intégrer par parties à nouveau.

II.7 Appliquer les résultats de la question II.6 avec $c_k = 0$ et $\psi = \varphi$ pour obtenir la solution particulière

$$g : x \mapsto \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(t) \, \mathrm{d}t$$

Conclure à l'aide de la formule de Taylor en 0 pour les polynômes.

A.2 Appliquer les résultats de la partie II à $n = 2$, $\psi = \alpha$, $c_1 = 0$ et $c_2 = 1$.

Exercice 1

Exo1-1 On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On dispose alors du

Théorème de Cayley-Hamilton : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors le polynôme caractéristique χ_{M} d'une matrice carrée $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un polynôme annulateur de M.

Calculons le polynôme caractéristique χ_{A} de la matrice A en remarquant qu'elle est diagonale par blocs :

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{XI}_3 - \mathrm{A}) = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & 1 & 0 \\ -1 & \mathrm{X} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{X} \end{vmatrix} = \mathrm{X} \cdot \begin{vmatrix} \mathrm{X} & 1 \\ -1 & \mathrm{X} \end{vmatrix} = \mathrm{X}(\mathrm{X}^2 + 1) = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{X}^3 + \mathrm{X} \text{ est un polynôme annulateur non nul de A.}}$

Rappelons qu'un polynôme P est annulateur d'une matrice carrée M lorsque $\mathrm{P(M)} = 0$. Ainsi, le résultat de cette question garantit $\mathrm{A}^3 + \mathrm{A} = 0$, ce que l'on peut vérifier facilement en calculant A^3.

Par ailleurs, on a cité la version matricielle du théorème de Cayley-Hamilton. De même, si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, alors le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u.

Exo1-2 Le polynôme $\mathrm{X}^2 + 1$ étant un facteur irréductible dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ du polynôme caractéristique de A, ce dernier n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Ceci impose que A n'est pas trigonalisable dans $\mathrm{E} = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; a fortiori,

$$\boxed{\text{A n'est pas diagonalisable dans E.}}$$

En revanche, $$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}(\mathrm{X}^2 + 1) = \mathrm{X}(\mathrm{X} - \mathrm{i})(\mathrm{X} + \mathrm{i})$$

est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ et par suite

$$\boxed{\text{A est diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \text{ et sp A} = \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}, 0\}.}$$

On rappelle que toute matrice carrée (complexe ou réelle) d'ordre n est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ puisque d'une part son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$ (théorème de d'Alembert-Gauss) et que d'autre part on dispose de l'équivalence :

$$\chi_{\mathrm{A}} \text{ scindé sur } \mathbb{K} \iff \text{A trigonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Pour la diagonalisabilité, on a l'implication

$$\chi_{\mathrm{A}} \text{ scindé à racines simples sur } \mathbb{K} \Longrightarrow \text{A diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

mais la réciproque est fausse en général. Signalons enfin une caractérisation de diagonalisabilité par les polynômes annulateurs : A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si elle possède un polynôme annulateur scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.

Exo1-3 D'après la question 2, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et $\mathrm{sp}\,\mathrm{A} = \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}, 0\}$. En conséquence, on peut écrire

$$\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1} \qquad \text{où} \qquad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad \mathrm{P} \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{C})$$

puis pour tout entier naturel k, on a $\mathrm{A}^k = \left(\mathrm{PDP}^{-1}\right)^k = \mathrm{PD}^k\mathrm{P}^{-1}$. Pour calculer les puissances impaires de D et donc de A, on peut remarquer que

$$\mathrm{D}^{2p+1} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}^{2p+1} & 0 & 0 \\ 0 & (-\mathrm{i})^{2p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0^{2p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^p\,\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^p(-\mathrm{i}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^p\mathrm{D}$$

de sorte que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{A}^{2p+1} = \mathrm{PD}^{2p+1}\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}[(-1)^p\mathrm{D}]\mathrm{P}^{-1} = (-1)^p\mathrm{PDP}^{-1} = (-1)^p\mathrm{A}$$

En multipliant par A, on en déduit les puissances paires de A :

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{A}^{2p+2} = \mathrm{A}^{p+1}\mathrm{A} = (-1)^p\mathrm{A}^2 \qquad \text{où} \qquad \mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{A}^k = \begin{cases} \mathrm{I}_3 & \text{si } k = 0 \\ (-1)^p\mathrm{A} & \text{si } k = 2p+1,\ p \in \mathbb{N} \\ (-1)^p\mathrm{A}^2 & \text{si } k = 2p+2,\ p \in \mathbb{N} \end{cases}}$$

Exo1-4 D'après les calculs menés à la question 3, les valeurs prises par $(\mathrm{A}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont $\mathrm{I}_3, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2, -\mathrm{A}, -\mathrm{A}^2$. Mais alors

$$\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{A}^k, k \in \mathbb{N}) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_3, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2, -\mathrm{A}, -\mathrm{A}^2) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_3, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2)$$

Autrement dit, la famille $\mathcal{B} = (\mathrm{I}_3, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2)$ est génératrice de F. En conséquence,

$$\boxed{\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{A}^k, k \in \mathbb{N}) \text{ est de dimension finie.}}$$

Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. De l'expression de A^2 obtenue en répondant à la question 3, il vient que pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$,

$$\alpha\mathrm{I}_3 + \beta\mathrm{A} + \gamma\mathrm{A}^2 = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha - \gamma & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = 0$$

ce qui implique que $\alpha = 0$ puis $\beta = \gamma = 0$. Ainsi, $(\mathrm{I}_3, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2)$ est une famille libre de F et par suite

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{B} = (\mathrm{I}_3, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2) \text{ est une base de } \mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{A}^k, k \in \mathbb{N}).}$$

> Généralisons ce résultat à une matrice carrée $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ quelconque possédant un polynôme annulateur $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ de degré $p \in \mathbb{N}^*$ et montrons que
>
> $$\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{A}^k, k \in \mathbb{N}) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}^{p-1}) \qquad (*)$$