Centrale Maths 2 PSI 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Christophe Fiszka (ENS Cachan) ; il a été relu par Thierry Limoges (ENS Cachan) et Céline Chevalier (Enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet propose d'étudier le groupe de Lorentz, qui est un sous-groupe multiplicatif du groupe des matrices inversibles et qui apparaît naturellement en mécanique quantique.

- La première partie est consacrée à l'étude générale de l'ensemble $\mathrm{O}(1,p)$ regroupant les matrices $\mathrm{L} \in \mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ telles que
$$\Delta_{p+1} = {}^t\mathrm{L}\,\Delta_{p+1}\mathrm{L} \quad \text{avec} \quad \Delta_{p+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,p} \\ 0_{p,1} & -\mathrm{I}_p \end{pmatrix}$$
On étudie la structure de groupe, les invariances, ainsi que les propriétés topologiques (est-il fermé ? compact ?). En particulier, on montre que $\mathrm{O}(1,p)$ correspond aux endomorphismes laissant invariante une certaine forme bilinéaire de la même manière que le groupe orthogonal laisse invariant le produit scalaire canonique.
- La seconde partie traite le cas où les matrices sont de taille 2. De nouveau, par analogie avec l'étude des rotations du plan, on prouve que les matrices de $\mathrm{O}(1,1)$ de déterminant 1 sont des *rotations hyperboliques*, c'est-à-dire des matrices de la forme
$$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\gamma & \mathrm{sh}\,\gamma \\ \mathrm{sh}\,\gamma & \mathrm{ch}\,\gamma \end{pmatrix}$$
- La dernière partie (la plus longue du sujet) propose de construire un algorithme qui à une matrice de Lorentz associe une décomposition RHR' avec R, R' deux matrices de rotation et H une matrice de rotation hyperbolique. La difficulté de cette partie est essentiellement liée aux calculs.

Ce sujet, plutôt technique, constitue un très bon exercice de révision sur le groupe orthogonal. En effet, les méthodes employées, ainsi que les résultats, sont très similaires à ceux utilisés pour l'étude du groupe des rotations, en particulier pour les petites dimensions (2 et 3). Quelques questions, signalées dans le corrigé, portent sur la structure algébrique de groupe, qui sont hors programme depuis la rentrée 2014.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Indications

I.A.3 [HP] Montrer que pour $\mathrm{L}, \mathrm{M} \in \mathrm{O}(1,p)$, $\mathrm{LM} \in \mathrm{O}(1,p)$ et $\mathrm{L}^{-1} \in \mathrm{O}(1,p)$.

I.A.4 Utiliser la relation ${}^t\mathrm{L} = \Delta_{p+1}\mathrm{L}^{-1}\Delta_{p+1}$.

I.A.5 Penser à la caractérisation des fermés comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

I.B.2 S'inspirer de l'identité de polarisation

$$(\mathrm{X} \mid \mathrm{Y}) = \frac{1}{4}\left(\|\mathrm{X}+\mathrm{Y}\|^2 - \|\mathrm{X}-\mathrm{Y}\|^2\right)$$

I.B.3 Établir l'équivalence entre (i) et (ii) à partir de la question I.B.1. Puis la formule de la question précédente justifie l'équivalence entre (ii) et (iii).

II.A Dans ces questions, il faut procéder par analogie avec la structure des matrices de $\mathrm{SO}(2)$.

II.A.1 Justifier qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a+b = e^\theta$.

II.A.3 Pour résoudre le système de la question précédente, on peut utiliser la relation hyperbolique (hors programme) suivante

$$\mathrm{sh}\,(x-y) \;=\; \mathrm{ch}\,(x)\;\mathrm{sh}\,(y) - \mathrm{sh}\,(x)\;\mathrm{ch}\,(y)$$

Plus généralement, on peut consulter le formulaire à la fin de cet ouvrage. Ne pas oublier le fait que le déterminant vaut 1, c'est-à-dire $ad - bc = 1$.

II.A.4 [HP] Les formules de trigonométrie hyperbolique ainsi que les sous-groupes sont hors programme.

II.B Que dire si γ tend vers $+\infty$?

II.C Traduire la relation ci-dessous en termes de vecteur propre de $\mathrm{L}(\gamma)$

$$e^\gamma = \mathrm{ch}\,(\gamma) + \mathrm{sh}\,(\gamma)$$

Sur le même principe, trouver une seconde relation et donc un second vecteur propre pour $\mathrm{L}(\gamma)$.

II.D Un groupe est dit commutatif si tous ses éléments commutent entre eux.

III.B Simplifier l'expression grâce à la question I.B.4 pour justifier l'inégalité de droite. Puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'inégalité de gauche.

III.B,C [HP] Les questions sur les groupes sont hors programme.

III.E.1 Se rappeler que la composée de deux réflexions est une rotation.

III.F.1 D'après la question III.E.1, il existe une rotation qui envoie a sur ${}^t(\|a\|, 0, 0)$.

III.F.2 Utiliser de nouveau les relations de la question I.B.4 en considérant

$$v = {}^t(0,0,1,0) \quad \text{et} \quad v' = {}^t(0,0,0,1)$$

III.F.3 Poser $\mathrm{R}_2 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$ où v_1 complète la famille (v_2, v_3) en une base orthonormée (directe). Attention à ne pas oublier que le coefficient en position $(1,1)$ est invariant.

III.G Remarquer que $\begin{pmatrix} \ell_{1,1} & \beta_1 \\ \alpha & \delta_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}^+(1,1)$.

III.F.4 Appliquer le même principe que la question I.B.4 à d'autres vecteurs de la base canonique.

III.H Reprendre pas à pas la preuve de la décomposition. On peut écrire la procédure en langage Python.

III.I Trouver deux décompositions de la matrice identité.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

I. Étude du groupe orthogonal généralisé $\mathrm{O}(1,p)$

I.A.1 On constate que

$$ {}^t\Delta_{p+1}\,\Delta_{p+1}\Delta_{p+1} = \Delta_{p+1}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,p} \\ 0_{p,1} & (-\mathrm{I}_p)^3 \end{pmatrix} = \Delta_{p+1} $$

De plus, $$\det(\Delta_{p+1}) = \det(-\mathrm{I}_p) = (-1)^p = \begin{cases} 1 & \text{si } p \text{ est pair} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut en déduire que

$$\boxed{\Delta_{p+1} \in \mathrm{O}(1,p) \qquad \text{et} \qquad \Delta_{p+1} \in \mathrm{O}^+(1,p) \iff p \text{ est pair}}$$

I.A.2 Il suffit de remarquer que le déterminant d'une matrice réelle L appartenant à $\mathrm{O}(1,p)$ est inclus dans $\{\pm 1\}$. En effet, la relation ${}^t\mathrm{L}\,\Delta_{p+1}\mathrm{L} = \Delta_{p+1}$ implique

$$\det(\Delta_{p+1}) = \det({}^t\mathrm{L}\,\Delta_{p+1}\mathrm{L}) = \det(\mathrm{L})^2\det(\Delta_{p+1})$$

Dès lors, $$\det(\mathrm{L})^2 = 1 \implies \det(\mathrm{L}) = \pm 1$$

Autrement dit, $$\boxed{\mathrm{O}(1,p) = \mathrm{O}^+(1,p) \cup \mathrm{O}^-(1,p)}$$

I.A.3 (Question hors-programme) Tout d'abord, il est clair d'après la question précédente que $\mathrm{O}(1,p)$ est un sous-ensemble de $\mathrm{GL}_{p+1}(\mathbb{R})$. Pour vérifier que $\mathrm{O}(1,p)$ est bien un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{p+1}(\mathbb{R})$, vérifions les trois propriétés requises :

- l'élément neutre I_{p+1} appartient à $\mathrm{O}(1,p)$ car

$$ {}^t\mathrm{I}_{p+1}\,\Delta_{p+1}\mathrm{I}_{p+1} = \Delta_{p+1} $$

- la stabilité par produit, ce qui signifie

$$\forall\,\mathrm{L},\mathrm{M} \in \mathrm{O}(1,p) \qquad \mathrm{L}\cdot\mathrm{M} \in \mathrm{O}(1,p)$$

En effet, $${}^t(\mathrm{LM})\,\Delta_{p+1}\mathrm{LM} = {}^t\mathrm{M}\,\underbrace{(\,{}^t\mathrm{L}\,\Delta_{p+1}\mathrm{L})}_{=\Delta_{p+1}}\,\mathrm{M} = {}^t\mathrm{M}\,\Delta_{p+1}\mathrm{M} = \Delta_{p+1}$$

- la stabilité par passage à l'inverse dans le sous-groupe, c'est-à-dire

$$\forall\,\mathrm{L} \in \mathrm{O}(1,p) \qquad \mathrm{L}^{-1} \in \mathrm{O}(1,p)$$

Pour ce dernier point, multiplions à gauche par $({}^t\mathrm{L})^{-1}$ et à droite par L^{-1} l'égalité ${}^t\mathrm{L}\,\Delta_{p+1}\mathrm{L} = \Delta_{p+1}$, ce qui fournit

$$\Delta_{p+1} = ({}^t\mathrm{L})^{-1}\Delta_{p+1}\mathrm{L}^{-1} = {}^t(\mathrm{L}^{-1})\,\Delta_{p+1}\mathrm{L}^{-1}$$

En conclusion, $$\boxed{\mathrm{O}(1,p) \text{ est un sous-groupe de } \mathrm{GL}_{p+1}(\mathbb{R}).}$$

De plus, sachant que l'ensemble des matrices de déterminant 1 est aussi un sous-groupe multiplicatif de $\mathrm{GL}_{p+1}(\mathbb{R})$ et qu'une intersection de sous-groupes est encore un sous-groupe, on a de même

$$\boxed{\mathrm{O}^+(1,p) \text{ est un sous-groupe de } \mathrm{O}(1,p).}$$

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

I.A.4 On peut expliciter l'inverse d'un élément de $\mathrm{O}(1,p)$ par

$$\mathrm{L}^{-1} = \Delta_{p+1}\,{}^t\mathrm{L}\,\Delta_{p+1} \qquad (\mathbf{1})$$

En effet, $\qquad \Delta_{p+1}\,{}^t\mathrm{L}\,\Delta_{p+1}\mathrm{L} = \Delta_{p+1}^2 = \mathrm{I}_{p+1}$

Par la structure de groupe de $\mathrm{O}(1,p)$, $\mathrm{L}^{-1} \in \mathrm{O}(1,p)$ donc ${}^t\mathrm{L} \in \mathrm{O}(1,p)$.

$$\boxed{\text{Si L appartient à } \mathrm{O}(1,p) \text{ alors } {}^t\mathrm{L} \text{ aussi.}}$$

I.A.5 Considérons les applications

$$\mathrm{F}\colon \begin{cases} \mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R}) \\ \quad \mathrm{L} \quad\longmapsto {}^t\mathrm{L}\,\Delta_{p+1}\mathrm{L} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \det\colon \begin{cases} \mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad \mathrm{L} \quad\longmapsto \det \mathrm{L} \end{cases}$$

Elles sont continues en tant que fonctions polynomiales en les coefficients de L. Or

$$\mathrm{O}(1,p) = \mathrm{F}^{-1}(\{\Delta_{p+1}\}) \qquad \mathrm{O}^+(1,p) = \mathrm{F}^{-1}(\{\Delta_{p+1}\}) \cap \det{}^{-1}(\{1\})$$

et $\qquad \mathrm{O}^-(1,p) = \mathrm{F}^{-1}(\{\Delta_{p+1}\}) \cap \det{}^{-1}(\{-1\})$

Sachant que les singletons sont des ensembles fermés et qu'une intersection finie d'ensembles fermés est fermée, on en déduit que

$$\boxed{\mathrm{O}(1,p),\ \mathrm{O}^+(1,p) \text{ et } \mathrm{O}^-(1,p) \text{ sont des fermés de } \mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R}).}$$

> La partie I.B porte sur les formes quadratiques, hors programme depuis 2014. Toutefois, tout est défini dans l'énoncé pour pouvoir répondre aux questions.

I.B.1 Introduisons $\mathrm{E} = (\mathrm{E}_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$, la base canonique de $\mathbb{R}^n$, identifié à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. De sorte que AE_j désigne la j-ième colonne de A. Puis ${}^t\mathrm{E}_i\,\mathrm{AE}_j$ représente le coefficient de A à la i-ième ligne et j-ième colonne. Ainsi, si on note $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_{i,j})$ et $\mathrm{B} = (\mathrm{B}_{i,j})$, l'hypothèse ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{AY} = {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{BY}$ pour tout X, Y appartenant à $\mathbb{R}^n$ appliquée à $\mathrm{X} = \mathrm{E}_i$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{E}_j$ impose que pour tout couple (i,j), $\mathrm{A}_{i,j} = \mathrm{B}_{i,j}$. C'est-à-dire exactement $\mathrm{A} = \mathrm{B}$. En résumé,

$$\boxed{\text{Si pour tout } (\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in (\mathbb{R}^n)^2, \text{ on a } {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{AY} = {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{BY}, \text{ alors } \mathrm{A} = \mathrm{B}.}$$

I.B.2 Inspirons-nous de l'identité de polarisation. Pour tout indice j, on a

$$4v_jv'_j = (v_j + v'_j)^2 - (v_j - v'_j)^2$$

Par sommation, $\qquad \boxed{\varphi_{p+1}(v,v') = \dfrac{1}{4}\left(q_{p+1}(v+v') - q_{p+1}(v-v')\right)}$

I.B.3 Justifions que (i) est équivalent à (ii) puis que (ii) est équivalent à (iii).

- $\underline{(i) \Longleftrightarrow (ii)}$ Soit $\mathrm{L} \in \mathrm{O}(1,p)$, c'est-à-dire ${}^t\mathrm{L}\,\Delta_{p+1}\mathrm{L} = \Delta_{p+1}$. D'après la question I.B.1, (i) est équivalent à dire que pour tout couple $(\mathrm{V},\mathrm{V}') \in \left(\mathbb{R}^{p+1}\right)^2$,

  $${}^t\mathrm{V}\,{}^t\mathrm{L}\,\Delta_{p+1}\mathrm{LV}' = {}^t\mathrm{V}\,\Delta_{p+1}\mathrm{V}'$$

  ou encore $\qquad {}^t(\mathrm{LV})\,\Delta_{p+1}\mathrm{LV}' = {}^t\mathrm{V}\,\Delta_{p+1}\mathrm{V}'$

  L'assertion (i) est donc équivalente à

  $$\forall\,(v,v') \in (\mathbb{R}^{p+1})^2 \qquad \varphi_{p+1}(f(v),f(v')) = \varphi_{p+1}(v,v')$$

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .