CCP Maths 2 PSI 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Céline Chevalier (Enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Tristan Poullaouec (Professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (ENS Cachan).

Ce sujet est composé d'un unique problème, qui se propose d'étudier une famille de polynômes ainsi que leurs racines. Il est divisé en trois parties, construites dans le prolongement les unes des autres.

- Dans une première partie, ces polynômes sont introduits en tant que vecteurs propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Elle permet également de démontrer quelques propriétés bien utiles dans la suite du problème, entre autres l'orthogonalité de ces polynômes pour un produit scalaire défini dans cette partie.
- Dans une deuxième partie, on montre une relation de récurrence entre ces polynômes, qui permet de conclure qu'ils sont scindés à racines simples.
- Enfin, une troisième partie définit une suite de matrices avec les coefficients apparaissant dans la relation de récurrence de la partie 2, et l'on montre que leurs polynômes caractéristiques sont égaux aux polynômes considérés jusqu'ici. Une étude approfondie des valeurs propres de ces matrices permet alors d'aboutir à un résultat final sur l'emplacement des racines de ces polynômes.

Ce sujet alterne entre des questions triviales et d'autres demandant un peu plus de réflexion. C'est un bon sujet de révision sur les polynômes et la diagonalisation, avec quelques points de vue originaux, comme l'expression des valeurs propres dans la troisième partie.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Indications

Partie I

I.2.1 [HP] Remarquer que $A'(X) = B(X)$, puis $V'(X) = U(X)$. Un endomorphisme est dit auto-adjoint s'il est symétrique.

I.2.3 Raisonner par récurrence sur $k \leqslant n$ en remarquant que Φ_k est la restriction de Φ_{k+1} à $\mathbb{R}_k[X]$.

I.2.4 Utiliser le caractère symétrique de Φ_n démontré à la question I.2.1, puis exploiter le fait que P_i et P_k sont des vecteurs propres.

I.2.5 Expliciter la matrice M_3 et chercher ses vecteurs propres.

Partie II

II.1 Considérer les degrés et coefficients dominants des différents polynômes.

II.2 Exploiter les questions I.1.2 et I.2.4.

II.3 Montrer que S_n et P_{n-2} appartiennent tous deux à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$ et à l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-3}[X]$: ils sont donc colinéaires. Pour obtenir l'inégalité $\mu_n > 0$, prendre le produit scalaire de l'égalité donnée avec P_{n-2} et utiliser les questions I.1.2 et I.2.4.

II.4 Utiliser tout d'abord le fait que P_k et P_0 sont orthogonaux, puis montrer par l'absurde que P_k serait de signe constant, puis nul sur l'intervalle $]-1\,;1\,[$.

II.5 Si P_n possède moins de n racines dans $]-1\,;1\,[$, alors Q est de degré au plus $n-1$. Conclure comme à la question précédente.

Partie III

III.1.2 Développer le déterminant $Q_n(X)$ par rapport à la dernière ligne pour faire apparaître $Q_{n-1}(X)$, puis développer le déterminant obtenu à nouveau par rapport à la dernière colonne.

III.1.3 Remarquer que les polynômes P_k et Q_k coïncident, puis que Q_n est égal au polynôme caractéristique de M_n.

III.2.1 Exprimer x dans la famille $(e_1, \ldots, e_i)$ puis calculer le produit scalaire $\langle u(x)|x\rangle$ en exploitant les propriétés de cette famille (ce sont des vecteurs propres et ils sont normés). Majorer ensuite la valeur obtenue en utilisant l'inégalité sur les α_k et montrer que la borne obtenue est réalisée pour un certain vecteur bien choisi de la sphère unité de F_i.

III.2.2 Raisonner comme à la question précédente.

III.3 Utiliser la formule de Grassmann. Après avoir trouvé l'inégalité $\langle u(x)|x\rangle \geqslant \alpha_i$, passer au maximum sur les vecteurs x puis à la borne inférieure sur les espaces F. Considérer ensuite le cas $F = F_i$.

III.4.1 Noter que si $x = (y,0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, alors $\langle u(x), x\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle v(y), y\rangle_{\mathbb{R}^{n-1}}$ où v est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{n-1}$ associé à la matrice M_{n-1}.

III.4.2 Enchaîner les inégalités données par la question précédente.

III.4.3 Exploiter les questions III.1.3 et III.4.2 avec les notations des questions III.2 et III.4.1.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

I. Étude d'un endomorphisme

I.1.1 Soient $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. Le polynôme P' est de degré au plus $n-1$ et le polynôme P'' au plus $n-2$. Par suite, comme le polynôme A est de degré 2 et le polynôme B de degré 1, le polynôme $\Phi(P) = AP'' + BP'$ est de degré au plus n. En outre, il est à coefficients réels, donc il appartient bien à $\mathbb{R}_n[X]$.

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\Phi(P+\lambda Q) &= A(P+\lambda Q)'' + B(P+\lambda Q)' \\ &= AP'' + \lambda AQ'' + BP' + \lambda BQ' \\ \Phi(P+\lambda Q) &= \Phi(P) + \lambda\Phi(Q)\end{aligned}$$

par linéarité de la dérivation des fonctions polynomiales. Ainsi, Φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$, si bien que

$$\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

> Remarquons l'égalité $B = A'$, ce qui permet d'écrire que $\Phi(P) = (AP')'$.

I.1.2 Soient P, Q et R trois polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord,

  $$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt = \int_{-1}^{1} Q(t)P(t)\,dt = \langle Q, P\rangle$$

  ce qui signifie que l'application donnée est symétrique.
- Ensuite,

  $$\langle P+\lambda Q, R\rangle = \int_{-1}^{1} (P(t)+\lambda Q(t))R(t)\,dt = \int_{-1}^{1} P(t)R(t)\,dt + \lambda\int_{-1}^{1} Q(t)R(t)\,dt$$

  par linéarité de l'intégrale, d'où

  $$\langle P+\lambda Q, R\rangle = \langle P, R\rangle + \lambda\langle Q, R\rangle$$

  L'application est donc linéaire à gauche, c'est-à-dire bilinéaire par symétrie.
- De plus, $\langle P, P\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt \geqslant 0$ donc l'application est positive.
- Enfin, si $\langle P, P\rangle = 0$, alors $P^2(t) = 0$ pour tout $t \in [\,-1\,;1\,]$ puisque P^2 est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle. On en déduit que P^2 admet une infinité de racines, puis que c'est le polynôme nul. Ainsi, $P = 0$.

Finalement, l'application donnée est bilinéaire, symétrique et définie positive d'où

$$\boxed{\text{L'application } (P,Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$$

En outre, $$\boxed{\langle XP, Q\rangle = \int_{-1}^{1} tP(t)Q(t)\,dt = \int_{-1}^{1} P(t)tQ(t)\,dt = \langle P, XQ\rangle}$$

> Plus généralement, on peut montrer que $\langle P, QR\rangle = \langle PR, Q\rangle$ pour tous polynômes P, Q et R.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

I.2.1 Remarquons comme à la question I.1.1 que $\mathrm{A}'(\mathrm{X}) = \mathrm{B}(\mathrm{X})$. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On a alors

$$\begin{aligned}\langle\Phi(\mathrm{P}),\mathrm{Q}\rangle - \langle\mathrm{P},\Phi(\mathrm{Q})\rangle &= \int_{-1}^{1}\big[\Phi(\mathrm{P})(t)\mathrm{Q}(t) - \mathrm{P}(t)\Phi(\mathrm{Q})(t)\big]\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{-1}^{1}\big[\mathrm{A}(t)\mathrm{P}''(t)\mathrm{Q}(t) + \mathrm{A}'(t)\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}(t)\\ &\qquad -\mathrm{P}(t)\mathrm{A}(t)\mathrm{Q}''(t) - \mathrm{P}(t)\mathrm{A}'(t)\mathrm{Q}'(t)\big]\,\mathrm{d}t\\ \langle\Phi(\mathrm{P}),\mathrm{Q}\rangle - \langle\mathrm{P},\Phi(\mathrm{Q})\rangle &= \int_{-1}^{1}\big[\mathrm{A}(t)(\mathrm{P}''(t)\mathrm{Q}(t) - \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}''(t))\\ &\qquad +\mathrm{A}'(t)(\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}(t) - \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}'(t))\big]\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Par suite, $$\langle\Phi(\mathrm{P}),\mathrm{Q}\rangle - \langle\mathrm{P},\Phi(\mathrm{Q})\rangle = \int_{-1}^{1}(\mathrm{A}(t)\mathrm{U}(t) + \mathrm{A}'(t)\mathrm{V}(t))\,\mathrm{d}t$$

en posant $$\boxed{\mathrm{U} = \mathrm{P}''\mathrm{Q} - \mathrm{P}\mathrm{Q}'' \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V} = \mathrm{P}'\mathrm{Q} - \mathrm{P}\mathrm{Q}'}$$

Remarquons désormais que $\mathrm{U} = \mathrm{V}'$. En effet,

$$\mathrm{V}' = (\mathrm{P}'\mathrm{Q} - \mathrm{P}\mathrm{Q}')' = \mathrm{P}''\mathrm{Q} + \mathrm{P}'\mathrm{Q}' - \mathrm{P}'\mathrm{Q}' - \mathrm{P}\mathrm{Q}'' = \mathrm{U}$$

d'où $$\langle\Phi(\mathrm{P}),\mathrm{Q}\rangle - \langle\mathrm{P},\Phi(\mathrm{Q})\rangle = \int_{-1}^{1}\big[\mathrm{A}(t)\mathrm{V}'(t) + \mathrm{A}'(t)\mathrm{V}(t)\big]\ \mathrm{d}t = [\mathrm{A}(t)\mathrm{V}(t)]_{-1}^{1} = 0$$

puisque $\mathrm{A}(-1) = \mathrm{A}(1) = 0$. On en déduit que l'endomorphisme Φ est symétrique. Comme Φ_n est la restriction de Φ à un sous-espace stable par Φ, on en déduit que

$$\boxed{\text{Pour tout } n,\text{ l'endomorphisme } \Phi_n \text{ est symétrique.}}$$

I.2.2 On a $\Phi_n(1) = 0$ et $\Phi_n(\mathrm{X}) = \mathrm{B} = 2\mathrm{X}$. Soit $k \in \{2,\ldots,n\}$. On a

$$\begin{aligned}\Phi_n(\mathrm{X}^k) &= \mathrm{A}k(k-1)\mathrm{X}^{k-2} + \mathrm{B}k\mathrm{X}^{k-1}\\ &= k(k-1)\mathrm{X}^k - k(k-1)\mathrm{X}^{k-2} + 2k\mathrm{X}^k\\ \Phi_n(\mathrm{X}^k) &= k(k+1)\mathrm{X}^k - k(k-1)\mathrm{X}^{k-2}\end{aligned}$$

On en déduit que la matrice de Φ_n dans cette base s'écrit de la façon suivante :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\cdot 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 2 & 0 & -3\cdot 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 2\cdot 3 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 3\cdot 4 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & (n-2)(n-1) & 0 & -n(n-1)\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & (n-1)n & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}}$$

Cette matrice étant triangulaire supérieure, on peut directement lire ses valeurs propres sur sa diagonale :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\Phi_n) = \{k(k+1)\,|\,k \in \{0,\ldots,n\}\}}$$

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .