X Physique B PC 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Rémy Hervé (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Olivier Frantz (Professeur agrégé en école d'ingénieur) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce sujet, conforme aux nouveaux programmes, prend pour prétexte l'étude des instruments de musique à cordes et à lames pour approfondir le modèle de la corde vibrante.

- Dans une première partie introductive, on rappelle sans démonstration les principales propriétés – hypothèses, résultats, mise en œuvre – du modèle idéal de la corde vibrante. Très qualitative, elle repose sur une bonne connaissance du modèle de la corde de Melde et de sa réalisation expérimentale.
- La deuxième partie élabore le modèle général qui sera utilisé par la suite. Profonde, elle nécessite non seulement de bien maîtriser la démonstration de l'équation d'onde de la corde vibrante, afin de l'adapter à un contexte plus riche, mais également de pouvoir prendre suffisamment de recul fasse au problème pour faire des choix pertinents ou formuler les hypothèses nécessaires.
- Le cœur du sujet est constitué par la troisième partie, qui représente à elle seule autant que l'ensemble des autres parties et se compose de multiples sous-parties. Consacrée à l'étude des instruments à lames, elle pose dans un premier temps la forme générale des solutions avant de mener l'étude détaillée du comportement d'une lame de xylophone. Tout d'abord très classique (recherche des modes propres), cette sous-partie s'enrichit ensuite d'une étude statique faisant appel aux outils de la statique des solides. Cette analyse prend tout son sens dans une dernière phase de modélisation, essentiellement énergétique, où le comportement statique est utilisé pour construire un modèle élastique effectif. De loin la section la plus complexe, elle nécessite une bonne connaissance des propriétés des oscillateurs mécaniques et électriques, ainsi que des lois de transport d'énergie dans les ondes acoustiques ; le tout sans perdre de vue le problème initial afin de garder le fil et de pouvoir répondre aux dernières questions. Enfin, une dernière sous-partie plus anecdotique aborde les lames encastrées et suppose de bien comprendre la signification des conditions aux limites.
- Pour terminer, la dernière partie revient sur le modèle de la corde vibrante pour analyser les altérations spectrales induites par le modèle de la partie II. Essentiellement calculatoire, cette partie ne nécessite aucune compétence nouvelle.

Très exhaustif, voire un peu répétitif sur la fin, ce sujet est l'occasion d'approfondir le modèle fondamental de la corde vibrante. À noter que si l'essentiel du sujet est constitué par la partie III, c'est dans la partie II que l'on trouve les analyses physiques les plus élaborées, ainsi que dans la sous-partie III.B.d. Enfin, si les parties sont essentiellement indépendantes, les principaux résultats nécessaires étant fournis par l'énoncé, une bonne compréhension de la partie II, de même que la maîtrise des connaissances requises dans la partie I, semblent indispensables pour mener à terme les autres parties.

Indications

Partie II

2 Veiller à respecter les conditions aux limites sur le schéma. À la résonance, l'amplitude de la corde est très grande devant celle du vibreur, alors qu'elle est du même ordre le reste du temps.

5 Faire un schéma et considérer la variation d'altitude entre deux points voisins.

6 Pour justifier le choix d'un modèle, on peut, par exemple, utiliser la relation de la question 5 pour exprimer les moments en fonction de l'angle α puis considérer le cas d'une tige manuellement déformée pour avoir une portion de tige rectiligne inclinée d'un angle non nul. Que prévoit alors chacun des modèles ? Que s'attend-on à trouver physiquement ?

8 La projection du PFD sur $\overrightarrow{e_x}$ donne une première équation qui, après intégration, permet de lier N, α et T. Cette relation fait intervenir une constante d'intégration, a priori fonction du temps, dont il faut justifier qu'on peut la considérer constante. Enfin, pour la seconde projection, il est nécessaire de se restreindre aux termes d'ordre 1 en α.

9 Chaque extrémité peut a priori se déplacer et pivoter. Pour chacun de ces comportements, deux conditions aux limites mutuellement exclusives peuvent être envisagées.

Partie III

14 Pour qu'une description par série de Fourier soit possible, il faut que toutes les vibrations partagent une période commune.

16 Utiliser les informations sur le la3 pour déterminer les constantes inconnues.

18 Attention, pour une portion de lame de type $]x, \mathrm{L}[$, les efforts à gauche sont $-\mathrm{T}$ et $-\mathcal{M}$.

20 L'équation différentielle d'ordre 2 de la question 6 impose la continuité de la fonction et de sa dérivée première.

25 Utiliser les résultats des deux questions précédentes.

26 Utiliser les données de la question précédente pour estimer l'énergie totale rayonnée par la barre. Les lois sur l'intensité acoustique rappelées en introduction seront également nécessaires.

27 Le facteur de qualité d'un oscillateur est le produit de sa pulsation propre par le temps caractéristique de décroissance de l'énergie.

Partie IV

39 Utiliser la deuxième expression obtenue pour B à la question 36.

40 Des deux expressions du coefficient B obtenues à la question 36, extraire une loi permettant de déduire la tension N à partir des données.

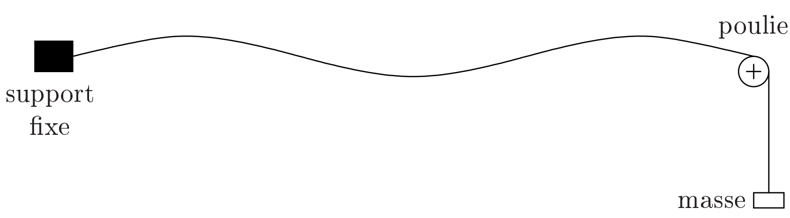
I. Préliminaires : vibration d'une corde souple

$\boxed{1}$ La corde souple est régie par l'équation proposée aux conditions suivantes :

- au repos, la corde est horizontale ;
- l'action du poids est négligeable devant les forces de tension ;
- la corde est inextensible (longueur totale à peu près constante), inélastique (pas de constante de raideur) et parfaitement souple (pas de module d'Young) ;
- en tout point de la corde en mouvement, l'angle que fait la corde avec la direction horizontale (direction de repos) reste toujours faible.

> On pourrait ajouter qu'il faut que la corde soit suffisamment tendue pour que les vibrations ne modifient pas sa tension. Toutefois, cette dernière condition est en réalité une conséquence des autres hypothèses.

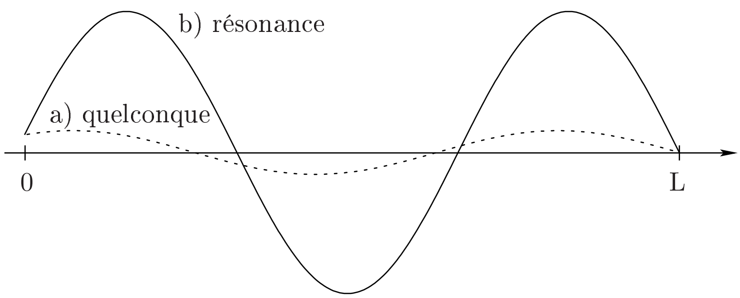
Expérimentalement, on réalise ces conditions en utilisant une corde souple, par exemple en fibres végétales tressées, attachée à une de ses extrémités à un point fixe (ou presque fixe tel qu'un vibrateur). Sa seconde extrémité est attachée à une masse suffisamment importante pour rendre négligeable l'action du poids sur la corde. Celle-ci est enfin disposée horizontalement jusqu'à une poulie qui permet de transmettre la tension exercée par la masse à l'ensemble de la corde.



Enfin, dans l'équation décrivant les petits mouvements vibratoires de la corde, la constante c est la célérité des ondes progressives, c'est-à-dire la vitesse à laquelle progresse une onde unique.

> Ce dispositif n'est pas le seul acceptable. On pourrait également attacher la corde à ses deux extrémités et fixer la tension de l'ensemble en jouant sur l'écartement entre les deux points de fixation, ou encore en enroulant la corde sur une clef de serrage comme dans une guitare ou un violon.

$\boxed{2}$ Dans les deux cas, on observe une vibration harmonique stationnaire de la corde dont l'extrémité droite ($x = \mathrm{L}$) est un nœud. Toutefois, dans le cas (a), le vibreur est un point quelconque de la vibration tandis que dans le cas (b), il apparaît comme un nœud « effectif » (l'amplitude n'y est pas nulle mais très faible devant l'amplitude des ventres).



Dans le cas (b), la longueur totale L de la corde sépare deux nœuds, ce qui correspond à

$$\mathrm{L} = n\,\frac{\lambda}{2}\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

où $\lambda = 2\pi\, c/\omega$ est la longueur d'onde associée à la pulsation ω. Les pulsations propres ω_n sont donc données par

$$\boxed{\omega_n = n\pi\frac{c}{\mathrm{L}}\ ,\ n \in \mathbb{N}}$$

3 La fréquence fondamentale est $\nu_1 = \omega_1/2\pi = c/2\mathrm{L}$. Pour augmenter cette fréquence, on peut donc, au choix :

- augmenter la célérité c ;
- diminuer la longueur de la corde L.

> Rappelons que la célérité c augmente si la tension de la corde augmente ou si sa masse linéique diminue.

4 Notons ω_{la3} la pulsation associée au la3. Pour jouer les 12 demis tons entre le la3 et le la4, on peut envisager un instrument à 13 cordes de même masse linéique et soumises à une même tension, de longueurs respectives :

$$\mathrm{L}_p = \frac{\pi}{2^{p/12}}\,\frac{c}{\omega_{\mathrm{la3}}}$$

Ainsi, pour $p = 0$ on retrouve le la3 et pour $p = 12$ on obtient le la4 tandis que les autres valeurs entières de p entre 0 et 12 donnent les demi-tons intermédiaires.

> L'énoncé est légèrement ambigu : du la3 au la4, il y a treize demis tons si on compte le la3 et le la4. Quels sont les 12 qu'il faut obtenir ? On peut supposer que cela n'a guère d'importance, les examinateurs s'intéressant sans doute plus à la démarche proposée qu'aux valeurs obtenues.
>
> L'« instrument » ainsi créé se rapproche du piano à queue ou de la harpe. Il est toutefois possible de couvrir toute la gamme avec moins de cordes, en réduisant « à la main » la longueur d'une corde donnée pour lui faire jouer plusieurs notes : c'est le principe des guitares et violons. Le nombre d'accords possibles (combinaisons de notes jouées simultanément) s'en trouve en revanche réduit.